Лекция 1. Метрические пространства

Определение Непустое множество X с заданной на нем функцией $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрическим пространством**, а функция d – **метрикой** на нем, если эта функция удовлетворяет следующим условиям:
1) $d(x, y) \geqslant 0$, при этом $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2) Функция d симметрична, то есть $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
3) Выполнено неравенство треугольника, то есть для любых $x, y, z \in X$ верно $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.
Элементы метрического пространства часто называют точками.

Это определение очень естественно и формализует нам концепцию расстояния между точками. Более того, с примерами некоторых метрических пространств мы знакомы еще со школы.

Пример Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с функцией $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$. Проверим, что это действительно метрика. Свойства 1 и 2 очевидны, а свойство 3 заключается в неравенстве:

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \leqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}$$

Упражнение Попробуйте сами доказать это неравенство. Это можно сделать даже школьными методами.

Сейчас мы не будем это доказывать, ведь в дальнейшем мы докажем знаменитое неравенство Коши-Буняковского, из которого необходимое нам соотношение сразу будет следовать. Много других примеров метрических пространств мы рассмотрим на семинаре, а также вы встретите их в упражнениях.

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $r > 0$ – положительное число, $x \in X$ – точка.
Множество $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ называется **открытым шаром** с центром в точке x и радиусом r.
Множество $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant r\}$ называется **замкнутым шаром** с центром в точке x и радиусом r.

Определение Множество U в метрическом пространстве (X, d) называется **открытым**, если для всякой точки $x \in U$ найдется $r > 0$, такое что $B(x, r)$ целиком содержится в U, то есть $B(x, r) \subset U$. Пустое множество считается открытым по определению. Множество F в метрическом пространстве называется **замкнутым**, если $X \backslash F$ – открытое множество.

Теорема Пусть (X, d) – метрическое пространство. Тогда:
1) Если A и B открыты, то $A \cap B$ тоже.
2) Если $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – набор открытых множеств, то множество $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ тоже открыто.

Доказательство
Начнем с пункта 1). Пусть $x \in A \cap B$. В силу того, что эти множества открыты, найдется радиус $r_1 > 0$, такой что $B(x, r_1) \subset A$. Аналогично найдется радиус $r_2 > 0$, такой что $B(x, r_2) \subset B$. А тогда $B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset A \cap B$, то есть $B(x, \min(r_1, r_2)) \subset A \cap B$. Итого мы взяли произвольную точку и нашли шар с центром в этой точке, который целиком содержится внутри $A \cap B$. Это и значит, что оно открыто.
Теперь докажем пункт 2). Здесь все намного проще. Рассмотрим произвольную точку $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Тогда она лежит в каком-то U_{λ_0}, но оно открыто, поэтому найдется шар $B(x, r) \subset U_{\lambda_0}$. Тогда верно и $B(x, r) \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. ■

Попробуйте теперь самостоятельно получить результат про замкнутые множества. Если не получится, то не стоит переживать, ибо на семинарах мы будем разбирать упражнения с лекций.

Упражнение Пусть (X, d) – метрическое пространство. Тогда:
1) Если A и B замкнуты, то $A \cup B$ тоже.
2) Если $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – набор замкнутых множеств, то множество $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ тоже замкнуто.

Слово **открытый** мы встречали уже в двух значениях. Покажем, что они согласуются.

Теорема Открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством.

Доказательство
Пусть (X, d) – метрическое пространство, $B(x, R)$ – открытый шар. Возьмем произвольную точку $t \in B(x, R)$ и найдем для нее радиус $r > 0$, такой что $B(t, r) \subset B(x, R)$. Положим $r := R - d(t, x)$. Тогда $r > 0$, так как $t \in B(x, R)$.
Покажем, что такой радиус нам подойдет, то есть $B(t, r) \subset B(x, R)$. Это условие означает, что если для точки $y \in X$ $d(t, y) < r$, то $d(y, x) < R$. Но в силу неравенства треугольника имеем:

$$d(y, x) \leqslant d(y, t) + d(t, x) < r + d(t, x) = R - d(t, x) + d(t, x) = R$$

Отсюда мы и получаем искомое соотноешние, что и завершает доказательство. ■

Похожим образом можно доказать теорему о замкнутом шаре.

Упражнение Докажите, что замкнутый шар в метрическом пространстве является замкнутым множеством.

Если вдруг у вас не получится доказать это самостоятельно, то мы разберем доказательство на семинаре. А сейчас мы перейдем к последовательностям

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек X. Будем говорить, что она **сходится** к точке $x \in X$ (точка x является **пределом** последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$), если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Более подробно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, такое что при $n > N$ выполнено $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Ясно, что это определение является обобщением обычного понятия предела на числовой прямой, знакомого вам из курса математического анализа. Более того, все привычные свойства предела выполнены, например, если предел существует, то он единственный. Оформим это в качестве утверждения.

Утверждение Если у последовательности точек в метрическом пространстве есть предел, то он единственен.

Доказательство
Предположим, что имеется два различных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. В силу неравенства треугольника получим $d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y)$. Осталось заметить, что правая часть неравенства стремится к нулю по определению предела, а тогда $d(x, y) = 0$, что и дает нам равенство $x = y$ и завершает доказательство. ∎

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек X. Будем говорить, что она **фундаментальна**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, такое что при $n, m > N$ выполнено $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Из курса математического анализа хорошо известен критерий Коши, который устанавливает связь между сходимостью последовательности и ее фундаментальностью на прямой. Мы его напомним, но доказательство опустим. Его можно найти в любом курсе математического анализа.

Факт (**Критерий Коши**)
Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

К сожалению, при переходе к общим метрическим пространствам данная теорема неверна. Тем не менее, сходящаяся последовательность всегда фундаментальна.

Утверждение Пусть последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства сходится к точке x. Тогда она является фундаментальной.

Доказательство
Все следует из оценки $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x)$. В самом деле, пусть нам дали $\varepsilon > 0$. Тогда найдется N, такое что при $n > N$ имеем $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для всяких $n, m > N$ получаем:

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

∎

Как уже было сказано, обратное верно не для всех метрических пространств. Один из примеров вы можете найти в упражнении ниже.

Упражнение Пусть $X = [0, 1)$ – полуинтервал, $d(x, y) = |x - y|$. Проверьте, что (X, d) – это метрическое пространство, а также найдите последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в этом пространстве, которая бы была фундаментальна, но у которой нет предела.

Определение Метрические пространства в которых все фундаментальные последовательности сходятся называют **полными**.

Именно полные метрические пространства являются основным объектов изучения функционального анализа. Конечно, вскоре мы познакомимся и с другими объектами изучения этой науки, например с банаховыми пространствами. Тем не менее, они тоже являются полными метрическими пространствами.

Пример Вещественные числа $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$ являются полным метрическим пространством. Это утверждение – переформулировка критерия Коши. В дальнейшем, когда мы будем писать $\mathbb{R}$, мы всегда будем предполагать, что на нем задана такая метрика. Она называется стандартной метрикой на прямой.
Множество $[0, 1)$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$ уже не является полным метрическим пространством. Это и есть содержание предыдущего упражнения.

Определение Пусть X – произвольное непустое множество. Через $B(X)$ обозначают множество всех ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с метрикой $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

Утверждение $B(X)$ – это метрическое пространство.

Доказательство

Все свойства метрики, кроме неравенства треугольника не вызывают сомнения. Проверим неравенство треугольника, то есть неравенство:

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|$$

В силу неравенства треугольника для модуля, при фиксированном x получаем: $|f(x)-g(x)| \leqslant |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$. Теперь возьмем супремум от левой и правой части:

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leqslant \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|$$

Это и есть искомое неравенство. ■

Пример Рассмотрим еще одно пространство $C[a, b]$. Это множество непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. С метрикой $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ оно также становится метрическим пространством.

Лекция 2. Классификация точек. Замыкание. Вложение Банаха

Сегодня мы продолжим разговор о метрических пространствах и подойдем к одной из основных теорем курса – теореме о пополнении. Для этого, нам потребуется обсудить некоторые новые понятия, которые вы можете знать из курса математического анализа. Начнем мы с доказательтсва полноты пространства ограниченных функций.

Теорема $B(X)$ – это полное метрическое пространство.

Доказательство

Проверим полноту. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N, такое что при $n, m > N$ выполнено $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. В частности, для всякой фиксированной точки x выполнено $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Поэтому для каждого x последовательность $n \mapsto f_n(x)$ является фундаменталньой последовательностью вещественных чисел, а значит сходится по критерию Коши. Обозначим $g(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Оставшаяся часть доказательства будет посвящена тому, что $g(x)$ лежит в $B(X)$ и тому, что $d(f_n, g) \to 0$. В самом деле, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N из условия фундаментальности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда при $n, m > N$ и фиксированном x получаем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Теперь, устремляя m к бесконечности и вспоминая определение $g(x)$ получим $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. И этого так для каждого фиксированного x. Поэтому и $\sup\limits_{n \to \infty} |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Теперь вспомним, что $|f_n(x)| < C$, так как f_n – ограниченная функция. Совмещая последние оценки получим, что $|g(x)| < C + \varepsilon$. Итого ограниченность g доказана. А до этого мы уже показали, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти N, такой что $\sup\limits_{n \to \infty} |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Это и значит, что g – предел f_n в метрическом пространстве $B(X)$. ■

Упражнение Докажите, что как и $B(X)$ пространство $C[a, b]$ является полным.

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A \subset X$. Точка $x \in X$ называется **точкой прикосновения** для A, если для всякого $r > 0$ множество $B(x, r) \cap A$ непусто. Если для всякого $r > 0$ множество $(B(x, r) \cap A) \backslash \{x\}$ непусто, то точка x называется **предельной точкой** для A.

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A \subset X$. **Замыканием** множества A называется множество $\{x \in X \mid x$ – точка прикосновения $A\}$. Замыкание обозначают $\overline{A}$.

Пример Рассмотрим хорошо известное нам полное пространство $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Возьмем там множества $A = (0, 1)$ и $B = [0, 1]$. Тогда $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = B = [0, 1]$.

Упражнение Пусть A – ограниченное множество на $\mathbb{R}$. Покажите, что $\sup A$ и $\inf A$ – это точки прикосновения A.

Упражнение Покажите, что если точка x не является предельной точкой множества A, то найдется шар $B(x, r)$, такой что множество $B(x, r) \cap A$ – конечно.

В прошлой лекции у нас уже было определение замкнутого множества. Однако этот термин можно было бы ввести иначе.

Теорема Множество A в метрическом пространстве (X, d) замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{A} = A$.

Доказательство

Предположим сначала, что A замкнуто. Докажем, что оно совпадет со своим замыканием. Ясно, что всегда выполнено $A \subset \overline{A}$, ибо в пересечении $B(x, r) \cap A$ лежит сама точка x, если $x \in A$. От противного докажем обратное включение. Пусть x – точка прикосновения A и при этом $x \notin A$. В силу замкнутости A множество $X \backslash A$ открыто, а тогда найдется радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \subset X \backslash A$. Но такое включение противоречит тому, что x – предельная точка A. Первая часть теоремы доказана.
Пусть теперь выполнено равенство $\overline{A} = A$. Покажем, что A замкнуто, то есть $X \backslash A$ – открыто. Рассмотрим какую-то точку x в $X \backslash A$. Так как она не лежит в A, то она не является точкой прикосновения A (фактически равенство $\overline{A} = A$ означает, что A содержит все свои точки прикосновения). А тогда найдется радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \cap A = \varnothing$, то есть $B(x, r) \subset X \backslash A$. Поэтому $X \backslash A$ – открыто. ■

Похожим образом можно доказать, что замыкание всякого множества является замкнутым. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Упражнение Для всякого множества A в метрическом пространстве (X, d) его замыкание $\overline{A}$ является замкнутым множеством.

Теорема Пусть (X, d) – полное метрическое пространство. Рассмотрим его подмножество A тоже как метрическое пространство, с той же метрикой, ограниченной на A: $d|_{A^2} : A \times A \to \mathbb{R}$. Тогда новое метрическое пространство $(A, d|_{A^2})$ будет полным, если A замкнуто в X.

Доказательство

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек A и покажем, что она имеет предел. Заметим, что расстояние между точками в A и в X измеряются одинаково. Поэтому, нашу последовательность можно рассматривать как фундаментальную последовательность в большем пространстве X, в котором она уже имеет некий предел x из-за полноты X. Покажем, что эта точка x является точкой прикосновения множества A. Предположим, что это не так, тогда найдется радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \cap A = \varnothing$. При этом по определению предела найдется N, такое что при $n > N$ будет выполнено $d(x_n, x) < r$ (взяли r в качестве ε). Это и дает нам противоречие, так как мы получаем, что при $n > N$ выполнено $x_n \in B(x, r) \cap A$, в то время как до этого мы получили, что это пересечение пусто. Итого доказано, что x – точка прикосновения A. Но так как A замкнуто, то $x \in A$. Поэтому последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в A, ее предел равен x. ■

Определение Метрическое пространство из теоремы, получающееся как подмножество (X, d) с ограничением метрики называется **подпространством**.

Упражнение Верно ли обратное? То есть верно ли, что если $(A, d|_{A^2})$ оказалось полным, то A замкнуто в X?

Упражнение Верно ли, что замкнутый шар $\overline{B}(x, r)$ равен замыканию открытого шара $\overline{B(x, r)}$?

Определение Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Говорят, что они **изометричны**, если существует функция $f : X \to Y$, удовлетворяющая следующим свойствам:
1) f – биекция;
2) Функция f сохраняет расстояния, то есть $d(x_1, x_2) = p(f(x_1), f(x_2))$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
Такая функция f называется **изометрией**.

Теперь вспомним про пространство $B(X)$, появившееся в конце первой лекции. В теореме о пополнении это пространство будет играть очень важную роль. Причина этому кроется в следующей теореме.

Теорема (Банах)
Всякое метрическое пространство (X, d) изометрично подпространству в $B(X)$.

Доказательство

Удивительно, но искомое соответствие предъявляется явно и выглядит довольно просто. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$. Искомую же изометрию зададим формулой $x \mapsto f_x(y)$, где $f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$. Осталось проверить, что это изометрия. Для этого, вспомнив определение метрики в $B(X)$, получаем соотношение на сохранение расстояния:

$$d(x_1, x_2) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, x_0) - d(y, x_2) + d(y, x_0)| = \sup_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, x_2)|$$

Теперь нам нужно найти этот супремум. Подставив $y = x_1$ наше выражение будет равняться $d(x_1, x_2)$, а значит получаем $\sup\limits_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \geqslant d(x_1, x_2)$. Осталось заметить, что в силу неравенства треугольника имеем:
$d(y, x_1) - d(y, x_2) \leqslant d(x_1, x_2)$ и $d(y, x_2) - d(y, x_1) \leqslant d(x_1, x_2)$, а это значит $|d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2)$. Взяв от обеих частей этого неравенства супремум по y получаем $\sup\limits_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2)$. Итого $\sup\limits_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, x_2)| = d(x_1, x_2)$.
Соединяя все соотношения мы и получаем $d(x_1, x_2) = \sup\limits_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)|$, а значит наше отображение удовлетворяет соотношению на сохранение расстояния. Важно отметить, что все функции f_x ограничены, так как мы должны сопоставлять точкам элементы $B(X)$, то есть ограниченные функции. Это так, ибо $|f_x(y)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leqslant d(x, x_0)$. По идее нам надо еще проверить, что наше сопоставление $x \mapsto f_x(y)$ инъективно, чтобы оно било биекцией с образом. Но это непосредственно вытекает из того, что $d(x_1, x_2) = \sup\limits_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)|$. ■

Лекция 3. Пополнение. Свойства полных пространств

Определение Пусть (X,d) – метрическое пространство, A – его подмножество. Говорят, что A **всюду плотно**, если его замыкание $\overline{A} = X$

Упражнение Покажите, что $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой. Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему этой лекции.

Определение Пусть (X,d) – неполное метрическое пространство. Его **пополнением** называется метрическое пространство (M,p), которое содержит всюду плотное подмножество $A \subset M$, такое что $(A, p|_{A^2})$ изометрично (X,d).

Теорема Для всякого неполного метрического пространства существует его пополнение.

Доказательство

Мы будем использовать многое из того, что мы уже узнали. Пусть (X,d) – это наше неполное метрическое пространство. Тогда по предыдущей теорема оно изомерично какому-то подмножеству M в $B(X)$. Возьмем теперь замыкание $\overline{M} \subset B(X)$. С метрикой подпространства $\overline{M}$ является полным, ибо это замкнутое подмножество полного метрического пространства $B(X)$. Более того, само M в $\overline{M}$ всюду плотно и изометрично X. Исходя из определения пространство $\overline{M}$ и будет пополнением (X,d). ∎

Эта теорема очень важна тем, что позволяет нам работать только с полными пространствами. Если исходное пространство не является полным, то мы можем перейти в его пополнение. Без доказательства приведем еще один замечательный результат про пополнение.

Теорема Пусть (X,d) – неполное метрическое пространство, (Y,p) и (Z,l) – два его пополнения. Тогда пространства (Y,p) и (Z,l) являются изометричными.

Теперь мы можем утверждать, что пополнение не только существует, но и единственно с точностью до изометрии. Теперь мы поговорим про свойства, которые присущи именно полным пространствам. Это поможет нам понять, почему это свойство так сильно ценится в функциональном анализе.

Определение Пусть (X,d) – метрическое пространство. Отображение $f: X \to X$ называется **сжимающим**, если существует число $\alpha \in [0,1)$, при котором для всех $x_1, x_2 \in X$ верно неравенство $d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha \cdot d(x_1, x_2)$.

Теорема (**О сжимающем отображении**)
Пусть (X,d) – полное метрическое пространство, $f: X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда у отображения f существует и единственна неподвижная точка $\hat{x}$, то есть точка, удовлетворяющая соотношению $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Доказательство

Сначала докажем существование такой точки, а затем единственность. Выберем произвольное $x_1 \in X$. Обозначим $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Таким образом, мы сконструировали последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что эта последовательность является фундаментальной. Используя сжимаемость, получаем:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) = \alpha \cdot d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^{n-1} \cdot d(x_2, x_1)$$

Теперь пусть $m > n$. Используя предыдущую выкладку оценим расстояние между x_m и x_n:

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha^{m-2} \cdot d(x_2, x_1) + \alpha^{m-3} \cdot d(x_2, x_1) + \ldots + \alpha^{n-1} \cdot d(x_2, x_1)$$

Теперь вспомним формулу бесконечно убывающей геометрической прогрессии, известную еще со школы. Именно для написания этой формулы мы и пользуемся тем, что $\alpha < 1$.

$$\alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^{m-2} \leqslant \alpha^{n-1} + \alpha^n + \ldots = \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}$$

Соединив все наши выкладки вместе, получим:

$$d(x_m, x_n) \leqslant (\alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^{m-2}) \cdot d(x_2, x_1) \leqslant \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \cdot d(x_2, x_1) \to 0,\ n, m \to \infty$$

Отсюда мы получаем, что наша последовательность действительно фундаментальна, а значит в силу полноты пространства она сходится. Пусть $\hat{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покажем, что $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Это равносильно тому, что $d(f(\hat{x}), \hat{x}) = 0$. Воспользуемся неравенством треугольника:

$$d(f(\hat{x}), \hat{x}) \leqslant d(f(\hat{x}), f(x_n)) + d(f(x_n), \hat{x}) \leqslant \alpha \cdot d(\hat{x}, x_n) + d(x_{n-1}, \hat{x})$$

Осталось заметить, что в силу определения $\hat{x}$ каждое из слагаемых стремится к нулю, поэтому $d(f(\hat{x}), \hat{x}) = 0$. Таким образом, существование неподвижной точки доказано. Еще в теореме утверждалась ее единственность.
Пусть $\hat{y}$ – другая неподвижная точка. Тогда $d(\hat{y}, \hat{x}) = d(f(\hat{y}), f(\hat{x})) \leqslant \alpha \cdot d(\hat{y}, \hat{x})$, что возможно только при $d(\hat{y}, \hat{x}) = 0$, то есть при $\hat{x} = \hat{y}$. На этом доказательство теоремы завершено. ■

Сделаем несколько комментариев к доказательству этой теоремы. Стоит отметить, что полноту мы использовали только для доказательства существования точки, но не для единственности. Поэтому во всяком метрическом пространстве верно, что если у сжимающего отображения есть неподвижная точка, то она только одна. Также это доказательство замечательно тем, что оно нам объясняет, как именно мы можем найти эту точку. Без доказательства сообщим любопытный факт.

Факт Существуют неполные метрические пространства, в которых всякие сжимающие отображения имеют неподвижную точку.

Упражнение Докажите, что если (X, d) – полное метрическое пространство, а $f : X \to X$ таково, что f^n – сжимающее отображение, то тогда все равно f имеет неподвижную точку.

Теорема (О вложенных шарах)
Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$ – последовательность замкнутых шаров. Если эти шары вложены друг в друга $(B_{n+1} \subset B_n)$ и при этом их радиусы r_n стремятся к нулю, то пересечение всех этих шаров непусто.

Доказательство
Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из центров наших шаров. Покажем, что она фундаментальна. Пусть $m > n$, тогда шар B_m содержится в шаре B_n, а значит и $x_m \in B_n$. Тогда $d(x_m, x_n) \leqslant r_n$. В силу того, что радиусы стремятся к нулю мы и получаем фундаментальность нашей последовательности, а значит, в силу полноты (X, d), существует $\hat{x}$ – предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Осталось показать, что точка $\hat{x}$ лежит во всех наших шарах. Рассмотрми какой-нибудь шар B_n. Он замкнут, а поэтому все его точки прикосновения ему принадлежат. Но $\hat{x}$ является точкой прикосновения. В самом деле, рассмотрим шар $B(\hat{x}, R)$. Из-за того, что $\hat{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ найдется N, такое что $d(x_n, \hat{x}) < R$ при $n > N$. А значит, в $B(\hat{x}, R) \cap B_n$ лежат все точки x_m, такие что $m > \max(N, n)$. ■ В связи с этой теоремой возникает ряд естественных вопросов. Некоторые из них простые, а некоторые – весьма сложные. Попробуйте самостоятельно подумать над ними, а на семинаре мы подробно их обсудим.

Упражнение Можно ли в условии теоремы отказаться от полноты?

Упражнение Верно ли, что пересечение всех шаров не только непусто, но и состоит из одной точки?

Упражнение Покажите, что от замкнутости шаров в теореме отказаться нельзя. Необходимый пример можно придумать на обычной числовой прямой.

Упражнение Можно ли в теореме отказаться от условия, заключающегося в том, что радиусы шаров стремятся к нулю?

Упражнение Верно ли, что если в метрическом пространстве всякая последовательность замкнутых вложенных шаров имеет непустое пересечение, то это пространство – полное?

Сейчас мы будем пользоваться теоремой о вложенных шарах, для доказательства одной из теорем, доказанной Бэром. Для ее формулировки нам потребуется дать новое определение.

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A \subset X$. Множество A называется **нигде не плотным**, если во всяком шаре $B(x, r)$ можно найти шар $B(x_0, r_0)$, такой что $B(x_0, r_0) \cap A = \varnothing$.

Упражнение Покажите, что если замкнутое множество не является нигде не плотным, то оно содержит шар положительного радиуса.

Теорема (Бэр)
Пусть (X, d) – полное метрическое пространство. Тогда его нельзя представить в виде счетного объединения своих нигде не плотных подмножеств.

Доказательство
Докажем эту теорему от противного. Предположим, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, причем все X_n нигде не плотны. Рассмотрим произвольный шар $B(x, R)$ и найдем в нем шар $B(x_1, 2r_1)$, который не содержит точек X_1. Такой шар можно выбрать замкнутым, например можем взять $\overline{B}(x_1, r_1)$. Теперь в шаре $B(x_1, r_1)$ найдем замкнутый шар $\overline{B}(x_2, r_2)$, который не содержит точек X_2. При этом, r_2 мы можем взять сколь угодно маленьким. Возьмем r_2 так, чтобы $r_2 \leqslant \frac{r_1}{2}$.
Продолжая это построение по индукции, получим поседовательность замкнутых вложенных шаров $\overline{B}(x_n, r_n)$, таких

что $\overline{B}(x_n, r_n) \cap X_n = \varnothing$ и $r_n \leqslant \frac{r_1}{n}$. По теореме о вложенных шарах у них есть общая точка $\hat{x} \in X$. Таким образом, мы и приходим к противоречию, ибо тогда эта точка $\hat{x}$ не содержится ни в одном из множеств X_n, но при этом $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. ■

В следующей лекции мы поговорим о непрерывных отображениях метрических пространств и на их примере увидим одно из применений теоремы Бэра.

Лекция 4. Непрерывные отображения

Определение Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **непрерывным в точке** $x \in X$, если для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ тоже сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Отображение называется **непрерывным**, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Определение непрерывности можно сформулировать иначе. Часто, в курсе математического анализа два вида определения непрерывности называются определениями по Гейне (это то, что мы сформулировали выше) и по Коши, которое будет сформулировано в теореме.

Теорема Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что при $d(t, x) < \delta$ выполняется $p(f(t), f(x)) < \varepsilon$

Доказательство

Пусть сначала выполняется определение по Коши. Выведем из него определение по Гейне. Итак, рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Нам надо показать, что $p(f(x_n), f(x))$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем для него $\delta > 0$ из определения по Коши. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то найдется N, такое что при $n > N$ выполняется $d(x, x_n) < \delta$, а тогда и $p(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ при $n > N$. Итого, первая часть теоремы доказана.
Доказывать вторую часть теоремы будем от противного. Пусть теперь выполнено определение Гейне. Предположим, что определение по Коши не выполняется, то есть найдется $\varepsilon > 0$, такое что для всякого $\delta > 0$ найдется $t(\delta)$, такое что $d(t, x) < \delta$, но $p(f(t), f(x)) \geqslant \varepsilon$. Так как это верно для всякого $\delta > 0$, то мы будем брать $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $t(\delta_n)$ обозначим как x_n. Тогда легко понять, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, так как $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. А значит, в силу определения Гейне получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Но это невозможно, так как для всякого n выполнено $p(f(x_n), f(x)) \geqslant \varepsilon$. Противоречие и завершает наше доказательство. ■

На самом деле, можно дать еще одно определение непрерывности. Оно будет отличаться от предыдущих тем, что по своей сути оно не использует понятие метрики, а использует лишь понятие открытого множества, которое нам встречалось в самой первой лекции. Это обстоятельство, к удивлению, оказывается чрезвычайно важным и приводит к появлению топологических пространств. Мы столкнемся с ними ближе к концу курса.

Теорема Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно (в каждой точке) тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества U в Y его прообраз $f^{-1}(U)$ является открытым множеством в X.

Доказательство

Пусть сначала отображение f непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое $U \subset Y$ и его прообраз $f^{-1}(U)$. Для того, чтобы этот прообраз был открыт, нам нужно для каждой точки $x \in f^{-1}(U)$ найти радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \subset f^{-1}(U)$. Пусть $x \in f^{-1}(U)$ – произвольная точка. Обозначим $y = f(x)$, тогда $y \in U$. Но в силу открытости U найдется шар $B(y, R) \subset U$. Теперь напишим определение по Коши непрерывности функции в точке x, взяв $\varepsilon = R$. Получим, что существует $\delta > 0$, такое что при $d(t, x) < \delta$ имеем $p(f(t), y) < R$, то есть $f(B(x, \delta)) \subset B(y, R) \subset U$. Другими словами, $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Итак, мы доказали что прообраз открыт. Теперь проведем обратнео рассуждение.
Пусть отображение f таково, что для всякого открытого множества U в Y его прообраз $f^{-1}(U)$ является открытым множеством в X. Проверим выпонение определения по Коши. Для этого возьмем произвольную точку $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое что при $d(t, x) < \delta$ будет выполняться неравенство $p(f(t), f(x)) < \varepsilon$. Множество $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ открыто, так как открытый шар открыт. Более того, сама точка x лежит в этом множестве, а значит найдется шар $B(x, r) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Но это и значит, что при $d(t, x) < r$ выполняется $p(f(t), f(x)) < \varepsilon$. То есть $\delta = r$ – искомое. ■

Упражнение Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого множества F в Y его прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X.

Теперь, обладая удобным набором определений нам не составит труда доказать непрерывность некоторых функций.

Утверждение Пусть (X, d) – метрическое пространство. Тогда:
1) Всякое сжимающее отображение $f : X \to X$ является непрерывным;
2) Функция расстояния f до непустого множества $A \subset X$ определенная формулой $x \mapsto \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$ является непрерывной как функция их X в $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.

Доказательство

Будем доказывать пункты нашего утверждения по очереди. Итак, пусть f – сжимающее отображение, то есть выполняется неравенство $d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha \cdot d(x_1, x_2)$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и покажем непрерывность в ней используя определение по Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Хотим найти $\delta > 0$, такое что при $d(t, x) < \delta$ имеем $d(f(t), f(x)) < \varepsilon$. Непосредственно из определения сжимаемости видно, что нам годится $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$.
Теперь докажем пункт про функцию расстояния. Заметим (смотри доказательство теоремы о вложении X в $B(X)$), что:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\inf_{y \in A} d(x_1, y) - \inf_{y \in A} d(x_2, y)| \leqslant d(x_1, x_2)$$

Теперь действуя по аналогии с пунктом 1) напишем все точно также, подставляя $\alpha = 1$, ибо мы нигде не пользовались тем, что $\alpha < 1$ в первом пункте. Это и завершает доказательство. ■

Часто говорят про непрерывность метрики. Вообще говоря, это может показаться немного некорректным, ведь для непрерывности область определения функции должна быть метрическим пространством, в то время как область определения метрики не является таковой. В самом деле, если (X, d) – метрическое пространство, то d определена не на X, а на квадрате $X \times X$, метрики на котором у нас нет. Эту проблему можно обойти с помощью конструкции произведения пространств, позволяющей ввести метрику на квадрате метрического пространства так, что в этом новом пространстве метрика d окажется непрерывной. Мы не будем в это закапываться в нашем курсе, ибо это нигде не будет использоваться в дальнейшем, а под непрерывностью метрики мы будем понимать следующую теорему.

Теорема (**Непрерывность метрики**)
Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности точек, такие что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Доказательство

Нам нужно показать, что $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \to 0$. Для этого воспользуемся неравенством треугольника:

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

Соединяя оба эти неравенства получаем оценку: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y)$. При этом правая часть стремится к нулю, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Отсюда и следует, что $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \to 0$. ■

Зачастую полезным оказывается усиленное свойство непрерывности, а именно – равномерная непрерывность.

Определение Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **равномерно непрерывным**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что при $d(x_1, x_2) < \delta$ выполнено $p(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

В чем отличие от обычной непрерывности? Здесь мы зафиксировав ε выбираем δ не для конкретной точки, а сразу для всех. Поэтому, непосредственно из доказательства видно, что сжимающее отображение и функция расстояния являются равномерно непрерывными.
Конечно, бывают непрерывные функции, не являющиеся равномерно непрерывными. Многие из них знакомы вам со школы.

Упражнение Придумайте непрерывную функцию, не являющуюся равномерно непрерывной.

В заключение лекции покажем пример применения теоремы Бэра к непрерывным отображениям.

Теорема (**Принцип равномерной ограниченности**)
Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, $f_n : X \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Предположим, что для всякой точки x множество $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено. Тогда найдется замкнутый шар B, такой что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ x\in B} |f_n(x)| < \infty$. То есть в некотором шаре все функции ограничены одной общей константой.

Доказательство

Для каждого натурального числа N рассмотрим множество $X_N = \{x \in X \mid \sup\limits_n |f_n(x)| \leqslant N\}$. Тот факт, что для всякой точки x множество $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено, означает, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Тогда по теореме Бэра найдется X_N, которое не является нигде не плотным. Заметим, что $X_N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-N, N])$. То есть, X_N является пересечением прообразов замкнутых множеств при непрерывном отображении, а потому X_N – это замкнутое множество. Из упражнения мы знаем, что всякое замкнутое множество, которое не является нигде не плотным содержит шар, то есть $B \subset X_N$. Это и означает, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ x\in B} |f_n(x)| \leqslant N < \infty$. ■

Лекция 5. Компакты и их свойства

В некоторых курсах математического анализа рассказывают про компактность и даже классифицируют все компактные подмножества $\mathbb{R}^n$. Тем не менее, чтобы сделать изложение независимым мы повторим это рассуждение, но для простоты выкладок ограничимся одномерным случаем. В многомерном случае доказательство происходит практически аналогично.

Определение Множество K в метрическом пространстве (X, d) называется **компактом**, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A \subset X$. Множество A называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором шаре, то есть существует $B(x, R)$, такой что $A \subset B(x, R)$.

Упражнение Покажите, что множество K в метрическом пространстве (X, d) компактно тогда и только тогда, когда оно компактно в подпространстве $(K, d|_{K^2})$.

Утверждение Всякий компакт в метрическом пространстве замкнут и ограничен.

Доказательство

Сначала докажем ограниченность. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и рассмотрим открытые шары $B(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что эти открытые шары покрывают множество K, то есть $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(x, n)$. Тогда, раз K – компакт, то можно выбрать конечное число шаров: $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B(x, n) = B(x, N)$. Это и означает ограниченность по определению.

Теперь покажем замкнутость. Для этого возьмем точку $x \in X \backslash K$ и найдем шар $B(x, r) \subset X \backslash K$. Рассмотрим множества $X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что это открытые множества, а также:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = X \backslash \{x\}$$

Отсюда следует, что $X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ – это открытое покрытие K, а значит из него можно выбрать конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Итого получаем:

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = X \backslash \bigcap_{n=1}^{N} \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = X \backslash \overline{B}\left(x, \frac{1}{N}\right)$$

Это и означает, что $B\left(x, \frac{1}{N}\right) \subset X \backslash K$. На этом доказательство утверждения заканчивается. ■

Утверждение Замкнутое подмножество компакта является компактом.

Доказательство

Пусть (X, d) – метрическое пространство, $K \subset X$ – компакт, $A \subset K$ – замкнутое множество. Рассмотрим произвольное покрытие A открытыми множествами $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Добавим к этому покрытию еще одно множество $X \backslash A$, которое тоже открыто. Итого покрытие уже покрывает вообще все множество X, в частности и наш компакт K, а значит мы можем выбрать конечное подпокрытие K. Оно имеет вид $\{U_1, \ldots, U_n, X \backslash A\}$. Ясно, что это покрытие является и покрытием A, так как $A \subset K$. Но тогда и $\{U_1, \ldots, U_n\}$ покрывает A. Это и есть искомое нами подпокрытие. ■

Эти не исчепрывается и половина свойств компактов. Мы еще вернемся к другим свойствам, но пока что наша цель заключается в описании компактов на прямой.

Теорема (**Лемма Гейне - Бореля**)
Всякий отрезок $[a, b]$ является компактом на прямой.

Доказательство

Для начала заметим, что достаточно считать, что отрезок покрыт не произвольным открытыми множествами, а интервалами. В самом деле, пусть U – открытое множество. Тогда для каждой точки $x \in U$ можно найти $r(x)$, такое что $B(x, r(x)) \subset U$. Тогда $U = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r(x))$. Поэтому из покрытия открытыми множествами мы получаем покрытие интервалами. Если из них мы выбрали конечное число, то сопоставляя каждому интервалу открытое множество из исходного покрытия, получим конечное подпокрытия.

Итак, пусть отрезок покрыт интервалами. Доказывать будем от противного. Пусть из нашего покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие. Поделим наш отрезок пополам, на $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Тогда какой - то из этих отрезков тоже не имеет конечного подпокрытия (если бы оба имели, то мы бы объединили эти подпокрытия и получили бы покрытие исходного). Этот отрезок обозначим I_1. Затем делим его пополам и снова выбираем отрезок без конечного подпокрытия, обозначим его I_2. Продолжая построение получим набор вложенных отрезков I_n с длинами стремящимися к нулю, так как $|I_n| = \frac{b-a}{2^n}$. Напомним, что $\mathbb{R}$ – полное метрическое пространство. Более того, отрезок – это замкнутый шар в $\mathbb{R}$. По теореме о вложенных шарах пересечение всех этих отрезков имеет общую точку $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Но эта точка лежит в исходном отрезке, а значит была в каком-то интервале из нашего покрытия (α, β). Обозначим $\delta = \min(x - \alpha,\ \beta - x)$. Тогда получим, что если отрезок содержит x и его длина меньше δ, то он допускает конечное подпокрытие, более того это покрытие состоит из одного элемента (α, β). Но такой отрезок найдется среди наших I_n, ибо их длины стремятся к нулю и все они содержат x. Это и дает нам противоречие, так как все I_n выбирались такими, что из них нельзя извлечь конечного подпокрытия. ■

Из того, что мы уже узнали про компакты легко выводится критерий компактности.

Теорема (**Критерий компактности на прямой**)
Множество на прямой компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство
То, что компакт всегда замкнут и ограничен мы уже доказали. Обратное следует из того, что если множество ограничено, то оно содержится в отрезке [a, b], который является компактом. А если множество при этом замкнуто, то оно окажется замкнутым подмножеством компакта, то есть также компактом. ■

Точно такой же критерий верен и для $\mathbb{R}^n$. Доказательство дословно все повторяет, но вместо леммы Гейне - Бореля надо будет показать, что параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ компактен. Впрочем, делается это также как и для отрезка. Как было сказано выше, мы опустим доказательство, но все равно сформулируем этот результат как теорему.

Теорема (**Критерий компактности в** $\mathbb{R}^n$)
Множество в $\mathbb{R}^n$ с метрикой $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

К сожалению, для произвольных метрических пространств такой критерий неверен. В качестве примера, предлагается решить упражнение.

Упражнение Покажите, что в пространстве $B(\mathbb{N})$ замкнутый единичный шар не является компактом.

Утверждение Пусть (X, d) и (Y, p) – метрические пространства, причем X – компакт. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывная функция. Тогда образ $f(X)$ – компакт в Y.

Доказательство
Рассмотрим U_λ – открытое покрытие $f(X)$. Тогда $f^{-1}(U_\lambda)$ – открытое покрытие X, так как прообраз открытого множества является открытым. В силу компактности X можно выбрать конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$. Тогда $\{U_1, \ldots, U_n\}$ – искомое подпокрытие $f(X)$. ■

Отсюда сразу же следует известная теорема.

Теорема (**Вейерштрасс**) Пусть (X, d) – метрическое пространство, которое является компактом, $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда f – ограничена и достигает своего максимума и минимума.

Доказательство
Рассмотрим $f(X)$ – это компакт в $\mathbb{R}$, а тогда это замкнутое и ограниченное множество. Отсюда сразу следует, что функция ограничена. Осталось показать, что она достигает максимума и минимума. Это следует из того, что $\sup f(X)$ и $\inf f(X)$ – это точки прикосновения $f(X)$, которое замкнуто. Поэтому $\sup f(X)$ и $\inf f(X)$ достигаются. ■

В заключение лекции сформулируем несколько упражнений.

Упражнение Пусть (X, d) – метрическое пространство, такое что всякая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена. Верно ли, что X – компакт?

Упражнение Пусть (X, d) – метрическое пространство, которое является компактом, $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Покажите, что f является равномерно непрерывной.

Упражнение Пусть (X, d) – метрическое пространство, такое что всякая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли, что X – компакт?

Лекция 6. Критерий компактности Хаусдорфа

Сегодня мы займемся доказательством одной из самых знаменитых и удивительных теорем функционального анализа. Это теорема – критерий компактности в произвольном метрическом пространстве. К сожалению, совсем простого доказательства у этой теоремы нет. Тем не менее, мы попытаемся его упростить, разбив на несколько кусочков.

Определение Пусть A – множество в метрическом пространстве (X, d). Набор точек $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется **ε-сетью для** A, если для каждой точки $x \in A$ найдется x_λ, такое что $d(x, x_\lambda) < \varepsilon$. Множество A называется **вполне ограниченным**, если для всякого $\varepsilon > 0$ у него существует конечная ε-сеть.

Упражнение Покажите, что $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является ε-сетью для A тогда и только тогда, когда $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B(x_\lambda, \varepsilon)$.

Утверждение Пусть A – вполне ограниченное множество в метрическом пространстве (X, d). Тогда:
1) A является ограниченным множеством;
2) $\overline{A}$ является вполне ограниченным.

Доказательство

Пусть $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ – это конечная ε-сеть для A. Тогда обозначим $p = \max(d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \dots, d(x_1, x_n))$. Пусть теперь $x \in A$ – произвольная точка A. Тогда из определения ε-сети найдется точка x_i, такая что $d(x, x_i) < \varepsilon$. Тогда, получаем:

$$d(x, x_1) \leqslant d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < \varepsilon + p$$

Эта выкладка означает, что $A \subset B(x_1, p + \varepsilon)$, что по определению и означает ограниченность A.
Теперь перейдем ко второй части теоремы. Пусть $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ – это конечная ε-сеть для A. Покажем, что тогда этот же набор точек является уже 2ε-сетью для $\overline{A}$. Отсюда, очевидно, будет следовать второй пункт теоремы. Рассмотрим точку $x \in \overline{A}$. Она является точкой прикосновения для A, поэтому найдется точка x_0, такая что $d(x_0, x) < \varepsilon$. Но так как $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ является ε-сетью, то найдется x_i, такое что $d(x_0, x_i) < \varepsilon$. Итого, получаем:

$$d(x, x_i) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, x_i) < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Это вычисление и завершает доказательство. ■

Утверждение Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

Доказательство

Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, A – бесконечное подмножество подмножество в нем. Предположим, что оно не имеет предельных точек, тогда для каждой точки $x \in X$ можно выбрать шар $B(x, r(x))$, такой что множество $B(x, r(x)) \cap A$ – конечно. Все такие шары образуют покрытие компакта X, а значит можно оставить конечное число шаров. Итак, конечное число шаров покрывает X, при этом в каждом шаре лишь конечное число точек A. Тогда и множество A конечно. Противоречие завершает доказательтсво. ■

Утверждение Множество A в метрическом пространстве (X, d) вполне ограничено тогда и только тогда, когда из всякой последовательности точек A можно выделить фундаментальную последовательность.

Доказательство

Сначала покажем, что если из каждой последовательности точек A можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, то множество A вполне ограничено. В самом деле, пусть это не так. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое что не существует конечной ε-сети. Тогда положим $x_1 \in A$ – произвольный элемент A. Тогда найдется какая-то точка $x_2 \in A$, такая что $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$, ведь иначе бы $\{x_1\}$ – это была бы конечная ε-сеть. Теперь можно найти $x_3 \in A$, такое что $d(x_1, x_3),\ d(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Продолжая это построение мы получим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в которой все попарные расстояния между элементами не меньше ε. Поэтому, из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Противоречие завершает эту часть доказательства.
Теперь покажем, что если пространство вполне ограничено, то из каждой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Итак, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек A. В силу вполне ограниченности, мы можем покрыть A конечным числом шаров радиуса 1, а потому найдется шар $U_1 = B(y_1, 1)$, который содержит бесконечное число элементов последовательности. Далее уже покроем множество $U_1 \cap A$ конечным число шаров радиуса $\frac{1}{2}$ и выберем шар U_2, такой что $U_2 \cap U_1 \cap A$ – бесконечно. Продолжая построение по индукциии находим шар U_n радиуса $\frac{1}{n}$, такой что $V_n = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ содержит бесконечно много точек A. Теперь из каждого $V_n \cap A$ находим попарно различные точки $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Получившася последовательность будет фундаментальна. В самом деле, пусть $m > n$. Обозначим $U_n = (y_n, \frac{1}{n})$. В силу убывания V_n обе точки x_{k_n} и x_{k_m} лежат в V_n. Итого получаем:

$$d(x_{k_n}, x_{k_m}) \leqslant d(x_{k_n}, y_n) + d(y_n, x_{k_m}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

$\blacksquare$

Теперь мы введем еще одно свойство метрического пространства, отличное от полноты и компактности. Оно будет играть важную роль не только в доказательстве критерия Хаусдорфа, но и в следующих лекциях.

Определение Метрическое пространство (X, d) называется **сепарабельным**, если у него есть счетное всюду плотное подмножество.

Упражнение Покажите, что подпространство сепарабельного метрического пространства является сепарабельным.

Утверждение Вполне ограниченное пространство является сепарабельным.

Доказательство

Нам надо найти наше всюду плотное подмножество. Для этого при каждом n рассмотрим конечную $\frac{1}{n}$-сеть. Далее объединим все эти сети. Тогда получим некоторое счетное множество A. Покажем, что оно всюду плотно. Для этого достаточно показать, что каждый шар $B(x, r)$ пересекается с множеством A. Но это очевидно, ведь найдется n, такое что $\frac{1}{n} < r$. $\blacksquare$

Последнее утверждение, которое нам понадобится для доказательства критерия Хаусдорфа принадлежит финскому математику Линделефу, внесшему большой вклад в топологию, теорию функций и анализ.

Теорема (**Линделеф**)
Пусть (X, d) – сепарабельное метрическое пространство, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – набор открытых множеств. Тогда из этого набора можно выбрать не более чем счетный поднабор с тем же самым объединением.

Доказательство

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное множество. Будем рассматривать всевозможные шары с центрами в x_k и рациональными положительными радиусами r_n, то есть шары вида $B(x_k, r_n)$. Ясно, что таких шаров счетное число. Для каждого шара $B(x_k, r_n)$ посмотрим на множества U_λ, которые его содержат. Если такое есть, то выберем произвольное одно и назовем U_{kn}. Если такого нет, то ничего не делаем. Итого получили счетный набор множеств $\{U_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$. Покажем, что этот набор и является искомым. Пусть $x \in U_\lambda$, для какого-то произвольного λ. Тогда, в силу открытости множеств, найдется радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \subset U_\lambda$. Теперь найдем x_n, такой что $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$, а затем найдем r_k между $d(x_n, x)$ и $\frac{r}{2}$. Тогда рассмотрим произвольную точку y из шара $B(x_n, r_k)$:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, x) < r_k + \frac{r}{2} < r$$

Это означает, что $B(x_n, r_k) \subset B(x, r) \subset U_\lambda$. А значит, что мы отметили какое-то множество U_{nk}, то есть наш $x \in U_{nk}$. $\blacksquare$

Теорема (**Критерий Хаусдорфа**)
Пусть (X, d) – метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:
1) (X, d) – компактное;
2) Всякое бесконечное подмножество X имеет предельную точку;
3) Из всякой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ точек X можно выделить сходящуюся подпоследовательность;
4) (X, d) – полное и вполне ограниченное пространство.

Доказательство

Доказывать будем по цепочке 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) $\implies$ 1).
1) $\implies$ 2): Это утверждение мы уже доказали выше.
2) $\implies$ 3): В самом деле, рассмотрим нашу последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Если у нее лишь конечное число значений, то какое-то значение принимается бесконечное число раз и мы можем выбрать постоянную подпоследовательность. Если же множество значений бесконечно, то у него есть предельная точка x. Тогда рассмотрим шар $B(x, 1)$ и выберем там точку из нашей последовательности. Пусть это x_{k_1}. Потом рассмотрим шар $B(x, \frac{1}{2})$ и выберем там тоже точку из нашей последовательности с номером больше чем k_1. Так можно сделать, ибо там бесконечное число точек нашей последовательности. Продолжая построение по индукции, мы получим $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ – подпоследовательность, которая очевидно сходится к x. Эта часть доказана.
3) $\implies$ 4): То, что пространство вполне ограничено очевидно, ведь мы выбираем не только фундаментальную, но даже сходящуюся подпоследовательность. Теперь покажем, что оно полно. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность. Выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, обозначим $\hat{x}$ ее предел. Покажем, что и исходная последовательность сходится к $\hat{x}$. Найдем N из фундаментальности такое, что при $n, m > N$ выполняется $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Теперь найдем M, такое что при $k > M$ выполнено $d(x_{n_k}, \hat{x}) < \varepsilon$. Тогда при $n > \max(N, M, n_M)$ получаем:

$$d(x_n, \hat{x}) \leqslant d(x_n, x_{n_{N+M}}) + d(\hat{x}, x_{n_{N+M}}) < 2\varepsilon$$

Отсюда и следует, что наша последовательность сходится, а потому пространство является полным.
4) $\Longrightarrow$ 1): Покажем теперь, что полное вполне ограниченное пространство является компактом. Рассмотрим произвольное открытое покрытие X. Так как X вполне ограничено, то мы уже знаем, что оно сепарабельно, а поэтому из нашего покрытия можно выделить счетное. Итого, мы можем считать, что нам изначально дано счетное открытое покрытие $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что из этого покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытия. Тогда для каждого n найдется точка x_n, которая не лежит в $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$. Итого получаем последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Вспомним, что вполне ограниченность пространства равносильна тому, что мы можем выбрать фундаментальную подпоследовательность. Но наше пространство – полное, поэтому мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Пусть x – ее предел. Эта точка лежит в каком-то множестве U_m, а тогда найдется радиус $r > 0$, такой что $B(x, r) \subset U_m$. По определению предела (возьмем $\varepsilon = r$) получаем, что найдется номер N, такой что при $k > N$ имеем $x_{n_k} \in U_m$. Но это противоречит, что $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$. Наше предположение о невозможности выбора конечного подпокрытия оказалось противоречивым. ■

На этом наше обсуждение компактов временно заканчивается, но мы вернемся к ним совсем скоро и будем уже использовать критерий Хаусдорфа. На следующей лекции мы перейдем к линейным пространствам.

Лекция 7. Линейные пространства. Норма и скалярное произведение

Мы наконец добрались до линейного анализа. Но сначала нам нужно напомнить основные определения из курса линейной алгебры. Вы можете знать материал этой лекции из курсов математического анализа и линейной алгебры, но мы независимо повторим все необходимые нам утверждения. Все векторные пространства, которые мы будем рассматривать предполагаются вещественными. Впрочем, все изложение можно было бы почти дословно повторить для комплексных пространств.

Определение Пусть X – векторное пространство. **Нормой** называется функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим свойствам:
1) $\|x\| \geqslant 0$, при этом $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2) Для всякого скаляра λ выполнено $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3) Выполняется неравенство треугольника, то есть для любых векторов $x, y \in X$ выполнено неравенство:
$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Векторное пространство вместе с нормой на нем называется **нормированным пространством**.

На самом деле, нормированное пространство является частным случаем метрического. Формализация этого утверждения содержится в следующей теореме.

Теорема Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство. Тогда функция $d : X^2 \to \mathbb{R}$, определенная формулой $d(x, y) = \|x - y\|$, является метрикой.

Доказательство
Проверим аксиомы метрики:
1) $d(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$. При этом ясно, что $d(x, x) = \|0\| = 0$ и наоборот;
2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$;
3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. ■

В связи с этой теоремой все понятия, которые мы определили для метрических пространств становятся верными и для нормированнных. В частности, полнота.

Определение Нормированное пространство, которое является полным в смысле метрики, порожденной нормой, называется **банаховым пространством**.

Вообще говоря, очень естественным кажется следующий вопрос. Пусть X – векторное пространство, на котором задана метрика d. Можно ли найти норму $\|\cdot\|$ на X, такую что выполнено $d(x, y) = \|x - y\|$? Этот вопрос оказывается невероятно тяжелым и никаких исчерпывающих условий того, когда такая норма найдется неизвестно математике до сих пор. Впрочем, в некоторых простых случаях можно что-то сказать.

Упражнение Покажите, что не существует нормы $\|\cdot\| : \mathbb{R}- \to \mathbb{R}$, такой чтобы она породила метрику

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \ x \neq y \\ 0, \ x = y \end{cases}$$

Теперь мы уже рассмотрим частный случай нормированного пространства.

Определение Пусть X – векторное пространство. **Скалярным произведением** на X называется симметрическая билинейная положительно определенная форма на X, то есть функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \to \mathbb{R}$, такая что:
1) Билинейность: для всех векторов $x, y, z \in X$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие тождества:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle$$

2) Симметричность: для всех векторов $x, y \in X$ выполнено $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) Положительная определенность: для всех векторов $x \in X$ выполнено неравенство $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, причем
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
Векторное пространство вместе со скалярным произведением на нем называется **евклидовым пространством**.

В самом начале нашего курса мы упоминали неравенство Коши-Буняковского. Вот и настало время сформулировать его и доказать.

Теорема (**Неравенство Коши-Буняковского**)
Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – евклидово пространство. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Доказательство
Возьмем $x, y \in X$ для которых мы хотим проверить то неравенство. Заметим, что если $x = 0$, то:

$$\langle x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = \langle 0+0, y\rangle = \langle 0, y\rangle + \langle 0, y\rangle$$

Отсюда следует, что при $x = 0$ имеем $\langle x, y\rangle = 0$, а потому неравенство верно. Аналогично при $y = 0$. Поэтому мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную формулой $f(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle$. Тогда:

$$f(t) = \langle y, y\rangle t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \langle x, x\rangle$$

То есть наша функция является квадратным многочленом, причем она неотрицательна из-за положительной определенности скалярного произведения. Тогда, дискриминант нашего многочлена должен быть отрицательный:

$$D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle < 0 \iff \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Вот мы и получили то неравенство, которое хотели. ■

Теорема Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – евклидово пространство. Тогда функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ являетмя нормой на X.

Доказательство
Проверим аксиомы нормы:
1) Очевидно следует из положиетльной определенности;
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$;
3) Надо доказать, что $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Возведем это неравенство в квадрат и будем доказывать, что $\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \leqslant 2\|x\|\|y\|$. Итак, получаем:

$$\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$$

Поэтому, нам достаточно доказать, что $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Но это и есть неравенство Коши-Буняковского. ■

Определение Евклидово пространство, которое является полным в смысле метрики, порожденной скалярным произведением, называется **гильбертовым пространством**.

Значительную часть нашего курса мы будем изучать именно гильбертовы и банаховы пространства. Рассмотрим несколько примеров.

Пример Самый простой пример евклидова пространства – это пространство $\mathbb{R}^n$, со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Отсюда же сразу следует то, что плоскость $\mathbb{R}^2$ с функцией $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ является метрическим пространством, так как функция d – это и есть метрика, порожденная скалярным произведением. Таким образом, как и говорилось в начале, из нашей теории автоматически следует неравенство

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \leqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}$$

Можно показать, что это пространство является еще и полным, то есть гильбертовым.

Упражнение Докажите, что $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ – гильбертово пространство.

Далее, когда мы будем писать $\mathbb{R}^n$, мы всегда предполагаем, что на этом множестве задано скалярное произведение, описанное выше.

Упражнение Докажите, что $\mathbb{R}^n$ является сепарабельным пространством.

Пример Обозначим через l_2 множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$. Тогда это множество будет линейным пространством относительно поточечных операций. Более того, формула $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_ny_n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),\ y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ задает скалярное произведение.

Доказательство

Сначала покажем, что это множество является линейным пространством. Тот факт, что мы можем умножить последовательность на скаляр и остаться в l_2 очевиден. Покажем, что сумма двух последовательностей снова лежит в l_2. Иными словами, нам надо доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2$ тоже сходится. В самом деле, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Этот ряд сходится абсолютно, так как $|x_n||y_n| \leqslant |x_n|^2 + |y_n|^2 = x_n^2 + y_n^2$. Ряд, состоящий из элементов правой части, сходится, так как это сумма сходящихся рядов. Осталось теперь заметить, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2$. Итого, ряд сходится как сумма сходящихся рядов. Мы проверили, что l_2 действительно является линейным пространством. Более того, в процессе доказательтсва мы получили, что скалярное произведение корректно определено, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ сходится. Выполнение всех аксиом скалярного произведения очевидно. ■

По аналогии с теоремой о полноте $B(X)$ или полноте $\mathbb{R}^n$ можно доказать полноту l_2. Оставим это в качестве упражнения, которое будем разбирать на семинаре.

Упражнение Докажите, что l_2 – гильбертово пространство.

Упражнение Докажите, что l_2 – сепарабельно.

Теорема (**Тождество параллелограмма**)
Пусть X – евклидово пространство, $\|\cdot\|$ – норма, порожденная его скалярным произведением. Тогда выполнено тождество:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Доказательство

Доказательство крайне просто. Надо всего лишь честно все расписать через скалярное произведение:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Вот мы и получили нужное нам тождество ■

Несмотря на простоту доказательства, это утверждение не стоит недооценивать. Мы уже немного обсудили вопрос о том, когда же метрика получается из нормы. Логично задаться вопросом, а когда же норма получается из скалярного произведения? Ясно, что необходимое условие – это выполнение равенства параллелограмма. Оказывается, что это и достаточно условие.

Факт (**Теорема Йордана-фон Неймана**)
Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ допускает скалярное произведение, порождающее норму, тогда и только тогда, когда выполнено тождество параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Упражнение Покажите, что в пространстве $B(\mathbb{N})$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ нельзя ввести скалярное произведение, которое было бы согласовано с этой нормой.

Еще евклидовы пространства замечательны тем, что в них можно измерять углы между векторами.

Определение Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – евклидово пространство, $x, y \in X$ – ненулевые вектора. Тогда **углом** φ **между ними** называется угол:

$$\varphi = \arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

На следующей лекции мы продолжим изучать линейные пространства, но посмотрим на них уже алгебраически.

Лекция 8. Алгебраические свойства линейных пространств

Начнем с того, что напомним определение базиса.

Определение Пусть X – линейное пространство. Система векторов S называется **линейно независимой**, если для всякого конечного набора векторов $x_1, \ldots, x_n \in S$ равенство

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n = 0$$

возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Определение Пусть X – линейное пространство. Система векторов S называется **полной**, если для всякого вектора $v \in X$ найдется конечный набор векторов $x_1, \ldots, x_n \in S$ и чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, что верно равенство:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n = v$$

Определение Пусть X – линейное пространство. Система векторов S называется **базисом**, если она полная и линейно независимая.

Определения, которые мы дали известны вам из курса линейной алгебры. Тем не менее, имеется одно отличие. В линейной алгебре все системы векторов предполагались конечными. Тут это совсем не так. Мы будем работать с бесконечномерными пространствами. Рассмотрим типичные примеры.

Определение Линейное пространство называется **конечномерным**, если у него есть конечный набор векторов, являющийся полной системой. В противном случае, пространство называется бесконечномерным.

Напомним также без доказательства одну теорему из линейной алгебры. Эту теорему вы можете найти в люом курсе линейной алгебры.

Факт (**Основная лемма о линейной зависимости**)
Пусть X – конечномерное пространство с базисом из n элементов. Тогда всякий набор из хотя бы $n+1$ вектора является линейно зависимым.

Пример Пространство непрерывных функций на прямой $C(\mathbb{R})$ бесконечномерно.

Доказательство
Рассмотрим систему функций $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Эта система – линейно независима. В самом деле, рассмотрим выражение вида $\lambda_1 x^{k_1} + \lambda_2 x^{k_2} + \ldots + \lambda_n x^{k_n} = 0$. Справа у нас стоит многочлен. Но многочлен имеет лишь конечное число корней, а у нас он является тождественным нулем. Поэтому все скаляры $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Итого мы имеем счетную систему линейно независимых функций. В конечномерном пространстве такое невозможно в силу основной леммы о линейной зависимости. ■

Пример Пространство последовательностей $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с покомпонентными операциями бесконечномерно.

Доказательство
Рассмотрим элементы $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$. Очевидно, что система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечная линейно независимая система. ■

Стоит отметить, что вопреки распространенному мнению, набор векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не является базисом. В самом деле, мы не сможем представить вектор $v = (1, 1, 1, \ldots)$ в виде суммы базисных векторов, так как в любой такой сумме будет лишь конечное число ненулевых элементов. Какой же тогда базис в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? А с чего мы вообще взяли, что этот базис есть? Вся тонкость заключается в том, что теорема о существовании базиса, которую вы знаете из линейной алгебры использоваал конечномерность пространства. Поэтому, вообще говоря, пока что ни откуда не следует то, что у этого пространства есть хоть какой-то базис. На самом деле, это верно и следует из весьма серьезной теоремы, доказательство которой в нашем курсе мы пропустим.

Факт (**Существование базиса**)
Пусть X – линейное пространство. Тогда оно имеет базис. Более того, всякую линейно независимую систему можно дополнить до базиса, а также все базисы имеет одинаковую мощность.

Исходя из теоремы выше, мы теперь можем утверждать, что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все же есть базис. Хотелось бы узнать, как этот базис выглядит. К сожалению, ответ на этот вопрос математике неизвестен. Практически у любого (если вообще не у любого) бесконечномерного пространства мы не можем конструктивно предъявить ни один базис, но по теореме выше, мы можем утверждать что он существует. Иногда даже это бывает полезно.

Теорема На всяком линейном пространстве X можно ввести норму, сделав его нормированным пространством.

Доказательство
Рассмотрим какой-нибудь базис $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в X. Возьмем положительные числа $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Теперь определим норму. Рассмотрим произвольный вектор v и разложим его по базису: $v = \alpha_1 x_{\lambda_1} + \ldots + \alpha_n x_{\lambda_n}$. Тогда положим:

$$\|v\| = |\alpha_1| p_{\lambda_1} + \ldots + |\alpha_n| p_{\lambda_n}$$

Очевидно, что все аксиомы нормы выполняются. ■

На этом мы заканчиваем разговор об общих линейных пространствах и снова возвращаемся к нормированным и евклидовым пространствам. Отметим, одно весьма полезное тождество.

Определение Вектор x **ортогонален** вектору y, если $\langle x, y\rangle = 0$. Это определение можно распространить уже и для нулевого вектора, считая, что он ортогонален чему угодно. Тот факт, что x ортогонален y, обозначается как $x \perp y$.

Теорема Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – евклидово пространство, S – система ненулевых векторов, которые попарно ортогональны. Тогда S – линейно независима.

Доказательство
Докажем эту теорему от противного. Предположим, что имеется линейная комбинация векторов из S, равная 0, то есть:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

Умножим скалярно это равенство на x_i. Тогда получаем:

$$\lambda_i \|x_i\|^2 = \langle x_i, \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\rangle = \langle x_i, 0\rangle = 0$$

Отсюда мы получаем, что $\lambda_i = 0$. Так можем сделать для всех i. Отсюда все и следует по определению. ■
Вспомним, что когда мы изучали метрические пространства, то мы сформулировали непрерывность метрики. На самом деле, норма и скалярное произведение тоже непрерывны.

Утверждение (**Непрерывность нормы**) Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство. Тогда норма $\|\cdot\|$ является непрерывной функцией.

Доказательство
Рассмотрим последовательность $x_n \to \hat{x}$. Надо показать, что $\|x_n\| \to \|\hat{x}\|$, то есть $|\ \|\hat{x}\| - \|x_n\|\ | \to 0$. В самом деле, в силу неравенства треугольника имеем: $\|\hat{x}\| = \|\hat{x} - x_n + x_n\| \leqslant \|\hat{x} - x_n\| + \|x_n\|$. Из этого наблюдения, мы получаем оценку:

$$|\ \|\hat{x}\| - \|x_n\|\ | \leqslant \|\hat{x} - x_n\|$$

А правая часть стремится к нулю, ибо это и означает сходимость по метрике, порожденной нормой. ■

Непрерывность скалярного произведения оставим в качестве упражнения.

Упражнение Скалярное произведение непрерывно, то есть если $x_n \to \hat{x},\ y_n \to \hat{y}$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$.

Упражнение Докажите теорему Пифагора. Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – евклидово пространство, $x, y \in X$. Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

На следующей лекции мы вернемся к компактами и получим критерии компактности в конкретных пространствах, в частности в уже известном нам пространстве l_2. На этом мы закончим обсуждение компактов в нашем курсе и перейдем к линейным операторам.

Лекция 9. Критерии компактности в конкретных пространствах

Как было обещано в конце предыдущей лекции, мы возвращаемся к компактам. Ранее мы уже узнали, что множество компактно в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Теперь мы хотим получить похожие критерии в более сложных пространствах.

Теорема (**Критерий компактности в** l_2)
Множество K в l_2 компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено, а также выполнено следующее условие:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{n=N}^{\infty} x_n^2 = 0$$

Доказательство
Пусть сначала K – компакт. Тогда он замкнут и ограничен. Осталось показать, что выполнено предельное условие. По критерию Хаусдорфа, K – вполне ограничен. Поэтому зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем конечную ε-сеть $y^1, \ldots, y^n$. Найдем теперь такое N, что хвосты всех элементов ε-сети станут меньше ε, то есть $\sum\limits_{n=N}^{\infty} (y_n^i)^2 < \varepsilon^2$ для всех i. Теперь рассмотрим произвольный $x \in K$ и оценим $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n^2$. Найдем для него y^i, такой что $d(y^i, x) < \varepsilon$. Тогда:

$$\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} x_n^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (x_n - y_n^i)^2} + \sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} (y_n^i)^2} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Это и дает нам выполнение нужного условия.
Теперь обратно, пусть выполнено предельное условие, множество замкнуто и ограничено. Тогда множество еще и полно, как подпространство, ибо l^2 – гильбертово. А значит, достаточно доказать что оно будет вполне ограничено. Так как множество ограничено, то найдется такое число C, что все кооридинаты в этом множестве не превосходят по модулю C. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и будем находить конечную ε-сеть. Сначала, зафиксируем номер N из нашего предельного условия, то есть для всех $x \in K$ выполнено $\sum\limits_{n=N}^{\infty} x_n^2 \leqslant \varepsilon^2$. Пусть теперь $T = \{\frac{k\varepsilon}{\sqrt{N}} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ и } |\frac{k\varepsilon}{\sqrt{N}}| \leqslant C\}$. Множество T – конечно, а потому и множество $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \mid x_i \in T\}$ конечно. Ясно, что оно образует $2\varepsilon^2$ сеть. ■

Упражнение Пусть $\alpha_n > 0,\ \alpha_n \to \infty$. Верно ли, что множество $E = \{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leqslant 1\}$ компакт в l_2?

Теорема (**Критерий компактности в** $B(X)$)
Множество K в пространстве $B(X)$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено, а также для всякого $\varepsilon > 0$ множество X можно разбить на конечное число частей $X_1, X_2, \ldots X_n$ с тем свойством, что для всякого i имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, где $f \in K,\ x_1, x_2 \in X_i$.

Доказательство
Сначала предположим, что множество K – компактно. Тогда оно замкнуто и ограничено. Осталось научиться разбивать X на части. Предположим, что K состоит из конечного числа функций $f_1, \ldots, f_n$. Тогда все эти функции ограничены по модулю одной общей константой M. Мы можем рассмотреть отображение $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$, которое задается формулой $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Это отображение ограничено, ибо его образ лежит в кубе $[-M, M]^n$. Теперь нам достаточно разбить наш куб на мелкие кубики, диаметром не больше ε. Обозначим эти кубики $M_1, \ldots, M_k$. Тогда в качестве разбиения множества X годятся $\Phi^{-1}(M_i)$. А что делать, если наше множество K не состоит из конечного числа элементов? В силу критерия Хаусдорфа наше множество вполне ограниченно, а значит там можно выбрать конечную ε-сеть $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Сделаем разбиение для этой конечной системы функций тем образом, который был описан выше. Пусть теперь $x_1, x_2 \in \Phi^{-1}(M_i),\ f \in K$. Найдем функцию f_j из нашей сети, такую что $d(f_j, f) < \varepsilon$. Тогда получим:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f_j(x_1)| + |f_j(x_1) - f_j(x_2)| + |f_j(x_2) - f(x_2)| < 3\varepsilon$$

Теперь наоброт, пусть множество ограничено, замкнуто и выполнено условие на разбиение частей. В силу полноты $B(X)$ нам достаточно показать, что K вполне ограничено. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем M, такое что $|f| < M$ для всех $f \in K$. Разобьем равномерно отрезок $[-M, M]$ с шагом $< \varepsilon$ точками $a_1, \ldots, a_k$. Покажем, что множество функций, которые постоянны на каждом X_i и равны там какому-то узлу $a_1, \ldots, a_k$ и есть искомая сеть. В самом деле, выберем по произвольной точке $x_i \in X_i$, а дальше возьмем функцию g из нашей предполагаемой сети, такую что $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$. Теперь покажем выберем произвольную точку $x \in X$. Найдем X_i, в котором лежит x. Итого получаем

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| < \varepsilon + \varepsilon + 0 = 2\varepsilon$$

Таким образом, пространство вполне ограничено. ■

Закончим разговор о компактах на самом известном критерии компактности, а именно критерии компактности в пространстве непрерывных функций на отрезке $C[a, b]$. На семинаре в самом начале курса мы разбрали, что это пространство полное. Критерий компактности, который мы сейчас докажем называется теоремой Арцела-Асколи. Сначала нам понадобится определение.

Определение Пусть $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство вещественных функций на отрезке $[a, b]$. Это семейство называется **равностепенно непрерывным**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для всякой функции f_λ при $|x_1-x_2| < \delta$ выполнено $|f_\lambda(x_1) - f_\lambda(x_2)| < \varepsilon$

Теорема (**Арцела-Асколи**)
Множество K в пространстве $C[a, b]$ компактно тогда и только тогда, когда оно замнкуто, ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство
Пусть K – компакт. Тогда это замкнутое, ограниченное множество. Очевидно, что всякий конечный набор непрерывных функций равностепенно непрерывен. Это следует из того, что отрезок – компакт, а функция, непрерывная на компакте, является равномерно непрерывной. Дальше, действуя по аналогии с прошлой теоремой выберем конечную ε-сеть, так как K вполне ограничено по критерию Хаусдорфа. Получим, что и все множество равностепенно непрерывно. Обратно, пусть мы имеем замкнутое, ограниченное и равностепенно непрерывное множество функций в $C[a, b]$. Его можно рассматривать как множество в $B([a, b])$. Поэтому, нам достаточно проверить, что наше множество вполне ограничено в пространстве непрерывных функций на отрезке. Но это практически очевидно, ведь используя предыдущую теорему, нам достаточно разбить отрезок на кусочки, чтобы на каждом из них функция колебалась меньше чем на ε. Для этого достаточно разбить наш отрезок с шагом $< \delta$, гед δ – число из равностепенной непрерывности, соответствующее ε.■

Критерии компактности применяются очень часто. Например, из теоремы выше следует весьма удивительный факт, который мы вынесем в упражнение.

Упражнение Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Пусть эта последовательность равностепенна непрерывна как семейство функций, а также сходится поточечно. Докажите, что она сходится равномерно.

На этом заканчивается наш разговор о компактах в рамках этого курса. Со следующей лекции и уже до самого конца курса мы будем работать с нормированными пространствами и линейными операторами.

Лекция 10. Ортогональное дополнение. Ряды Фурье

На этой лекции мы будем работать с евклидовыми пространствами. Наша ближайшая цель – это классификация всех сепарабельных гильбертовых пространств.

Определение Пусть X – евклидово пространство, L – его линейное подпространство. **Ортогональным дополнением** к L называется множество $L^{\perp} = \{x \in X \mid \langle x, v \rangle = 0 \text{ для всех } v \in L\}$.

Установим одно из основных свойств гильбертовых пространств, которое заключается в том, что всякое замкнутое линейное подпространство можно дополнить прямой суммой до всего пространства. Для этого напомним определение прямой суммы.

Определение Пусть V – линейное пространство, L_1, L_2 – его подпрострнаства. Говорят, что V является **прямой суммой** L_1, L_2, если для всякого $v \in V$ найдутся единственные вектора $a \in L_1$ и $b \in L_2$, такие что $v = a + b$.
Это обозначают в виде $V = L_1 \oplus L_2$

Упражнение Докажите, что ортогональное дополнение – замкнутое подпространство.

Теорема (**Об ортогональном дополнении**)
Пусть H – гильбертово пространство, L – замкнутое линейное подпространство. Тогда верна формула $H = L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство
Зафиксируем произвольный $x \notin L$ и будем искать $y \in L$ такой, чтобы минимизировать выражение $\|x-y\|$. Обозначим $d = \inf\limits_{y \in L} \|x-y\|$. По определению инфимума найдется последовательность точек $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ из L, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d$.
Покажем, что тогда сама последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться. Применим тождество параллелограмма для $a = x - y_n,\ b = x - y_m$. Получаем:

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leqslant 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2$$

Итого, при больших номерах n, m правая часть стремится к нулю, а значит наша последовательность фундаментальна. В силу того, что пространство H – гильбертово, а L – его замкнутое подпространство, то L – полное, а значит y_n сходится к $y \in L$. В силу непрерывности нормы получаем $d = \|x - y\|$.
Теперь мы покажем, что на самом деле $x - y \in L^{\perp}$. Рассмотри произвольный $z \in L$ и рассмотрим функцию:

$$f(t) = \|x - y - tz\|^2 = \langle x - y - tz, x - y - tz \rangle = \langle z, z \rangle t^2 + 2t(\langle z, y \rangle - \langle x, z \rangle) + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle$$

То есть наша функция – это парабола. Причем, мы про нее уже знаем, что она достигает минимума в точке $t = 0$. Отсюда следует, что $\langle z, y \rangle - \langle x, z \rangle = 0$, то есть $x - y \perp z$. И это был произвольный вектор $z \in L$. Поэтому, мы доказали перпендикулярность вектора x плоскости L.
На этом доказательство теоремы уже почти закончено. Мы можем теперь представить всякий вектор x в виду $y + (x - y)$, причем $y \in L,\ x - y \in L^{\perp}$. Осталось показать, что это прдставление единственно.
В самом деле, пусть $x = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$, где $y_1, z_1 \in L,\ y_2, z_2 \in L^{\perp}$ Тогда получим, что $y_1 - z_1 = y_2 - z_2$, но слева стоит вектор из L, а справа из его ортогонального дополнения, поэтому $y_1 = z_1$ и $y_2 = z_2$. ■

Свойство из теоремы присуще только гильбертовым пространствам. Для произвольного нормированного и даже банахового пространства неверно, что всякое замкнутое подпространство можно дополнить прямой суммой до всего пространства замкнутым подпространством.

Определение Пусть X – евклидово пространство. Система векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **ортонормированной**, если эти векторы попарно ортогональны и по норме равны единице. Если у нас фиксирована ортонормированная система, то для всякого вектора $x \in X$ мы можем рассмотреть числа $x_n = \langle x, e_n \rangle$, называемые **коэффициентами Фурье вектора** x.

Определение Пусть имеется евклидово пространство X и ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для всякого вектора $x \in X$ его **рядом Фурье** называется формальное выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Отметим, что в определении можно было бы брать любую систему, а не только ортонормированную. Тем не менее, чаще всего мы будем пользоваться именно ортонормированными системами.
Более того, пока что совершенно непонятно, почему ряд Фурье вообще сходится и как он связан с самим вектором x. Скоро мы это узнаем. Одно из классических утверждений про ряды Фурье называется неравенством Бесселя.

Теорема (**Неравенство Бесселя**)
Пусть X – евклидово пространство с ортонормированной системой $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть x_n – коэффициенты Фурье элемента $x \in X$. Тогда верно неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leqslant \|x\|^2$$

В частности, последовательность коэффициентов Фурье лежит в l_2.

Доказательство

Обозначим через x^n частичную сумму ряда Фурье, то есть $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Сделаем несколько вычислений:

$$\|x^n\|^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\langle x - x^n, x^n \rangle = \langle x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \implies x - x^n \perp x^n$$

Теперь воспользуемся теоремой Пифагора. Получим, что: $\|x\|^2 = \|x - x^n\|^2 + \|x^n\|^2$, то есть $\|x^n\|^2 \leqslant \|x\|^2$.
Это и дает нам искомое неравенство при стремлении $n \to \infty$. ■

Удивительно, но оказывается что верен и обратный факт, а именно всякая последовательность из l_2 – это коэффициенты Фурье некоторого вектора. Правда теперь, нам уже нужно будет, чтобы пространство было полным.

Теорема (**Рисс-Фишер**)
Пусть H – гильбертово пространство с ортонормированной системой $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, x_n – последовательность из l_2. Тогда найдется вектор $x \in H$, такой что $x_n = \langle x, e_n \rangle$.

Доказательство

Логично предположить, что искомый вектор x будет задаваться формулой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Это мы и будем доказывать. Но сначала надо показать, что такой ряд вообще сходится. Рассмотрим его произвольные частичные суммы x^n и x^m, предположим, что $m > n$. Тогда:

$$\|x^m - x^n\|^2 = \left\| \sum_{k=n}^{m} x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} x_k^2$$

Но так как ряд из квадратов сходится при $n, m \to \infty$ получим, что $\|x^m - x^n\| \to 0$, а значит последовательность частичных сумм фундаментальная и в силу полноты ряд сходится к некоторому вектору $x \in H$. Теперь покажем, что наши числа – это действительно коэффициенты Фурье. В самом деле:

$$\langle x, e_k \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_k \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x^n, e_k \rangle = x_k$$

Во втором равенстве мы воспользовались непрерывностью скалярного произведения. ■

После этих теорем уже можно догадаться, что всякое гильбертово сепарабельное пространство будет устроено как l_2, ведь мы можем каждому вектору сопоставить набор его коэффициентов Фурье. Это так, но все несколько сложнее, ведь сначала нам нужно отыскать ортонормированную систему, по которой мы будем считать эти коэффициенты. Более того, мы хотим чтобы это соответсвие было однозначно, то есть, чтобы по коэффициентам Фурье вектор восстанавливался однозначно. Для произвольной ортонормированной системы это неверно. На следующей лекции мы аккуратно покажем, как можно всегда построить хорошую ортонормированную систему и формализуем идею, изложенную выше.

Упражнение Приведите пример гильбертова пространства и ортнормированнйо системы в нем, такой что по коэффициентам Фурье при разложении по этой системе вектор восстанавливается не однозначно.

Лекция 11. Классификация сепарабельных гильбертовых пространств

Определение Пусть X – евклидово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная система векторов. Говорят, что эта система является:
1) **базисом Шаудера**, если она линейно независима и для всякого $x \in X$ существует и единственно представление x в виде ряда: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$;
2) **замкнутой**, если множество конечных линейных комбинаций векторов этой системы всюду плотно;
3) **полной**, если из того, что для всякого номера n выполнено равенство $\langle x, e_n \rangle = 0$ следует, что $x = 0$;
4) **удовлетворяет равенству Парсеваля**, если для всякого $x \in X$ в неравенстве Бесселя достигается равенство, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|x\|^2$.

Центральное утверждение заключается в том, что для ортонормированных систем в гильбертовых пространствах все эти 4 условия оказываются эквивалентными.

Теорема (**Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве**)
Пусть H – гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система векторов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) Эта система замкнута;
2) Эта система полна;
3) Эта система является базисом Шаудера;
4) Эта система удовлетворяет равенству Парсеваля.

Доказательство
Доказывать будем по цепочке 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) $\implies$ 1). Точно также мы действовали при доказательстве критерия компактности Хаусдорфа.
1) $\implies$ 2): Итак, пусть наша система замкнута. Покажем, что она полна. Доказывать будем от противного. Пусть найдется вектор $x \in H$, такой что все его коэффициенты Фурье $= 0$. Так как наша система замкнута, то приблизим конечной линейной комбинацией наш вектор:

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_{k_n} \right\| < \frac{\|x\|}{2}$$

В силу того, что все коэффициенты Фурье нулевые, мы можем получить интересную формулу для нормы нашего вектора:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_{k_n}, x \rangle \leqslant \|x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_{k_n}\| \cdot \|x\| < \frac{\|x\|^2}{2}$$

Отсюда и получаем, что $\|x\| = 0$, а значит $x = 0$.
2) $\implies$ 3): Пусть система полна. Покажем, что она является базисом Шаудера. Линейная незавсимость векторов следует из того, что система ортонормирована. Рассмотрим произвольный $x \in X$ и найдем его коэффициенты Фурье x_k. В силу неравенства Бесселя эти коэффициенты лежат в l_2, а тогда по теореме Рисса-Фишера имеется вектор y, такой что $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. В силу полноты нашей системы мы получим, что $y = x$, а значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ и есть искомое представление для x.
3) $\implies$ 4): Пусть наша система является базисом Шаудера. Возьмем произвольный вектор x и представим его в виде ряда Фурье: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Тогда возьмем от обоих частей квадрат нормы, воспользовавшись ее непрерывностью:

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

4) $\implies$ 1) : Пусть для вектора x выполняется равенство Парсеваля. Попробуем приблизить его конечной линейной комбинацией. Вспомним, что $x - x^n \perp x^n$, а потому $\|x\|^2 = \|x - x^n\|^2 + \|x^n\|^2$. То есть равенство Парсеваля влечет то, что $\|x - x^n\|^2 \to 0$, а значит $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Поэтому мы можем приблизить x частичной суммой этого ряда. ■

Теорема В сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированная система, являющаяся базисом Шаудера.

Доказательство
В силу сепарабельности у нас имеется счетный всюду плотный набор векторов $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отсортируем эту систему, чтобы она была линейно независимой. Для этого сначала выбросим из нее все нулевые вектора, а затем сделаем ее линейно независимой: если мы взяли $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots v_{n_k}$, то в качестве $v_{n_{k+1}}$ возьмем вектор v_i с наименшьим $i > n_{k+1}$, такой что он линейно независим с уже взятыми векторами. Итого, мы получили из исходной системы линейно независимую систему. Теперь ее надо ортонормировать. Для упрощения записи, полученную систему обозначим $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, а не $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

$$f_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$$

$$f_2 = \frac{h_2 - \langle f_1, h_2\rangle f_1}{\|h_2 - \langle f_1, h_2\rangle f_1\|}$$

$$f_3 = \frac{h_3 - \langle h_3, f_2\rangle f_2 - \langle h_3, f_1\rangle f_1}{\|h_3 - \langle h_3, f_2\rangle f_2 - \langle h_3, f_1\rangle f_1\|}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В итоге мы получим уже ортонормированную систему. Отметим, что эта система будет замкнутой, так как всяикй вектор v_n мы можем получить в виде линейной комбинации векторов из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме об ортонормированных системах в гильбертовом пространстве мы получаем, что наша система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера. ■

Метрические пространства, как мы уже видели, удобно рассматривать с точностью до изометрий. Действуя аналогично, мы хотим не различать евклидовы пространства, которые устроены абсолютно одинаково, но отличаются лишь своей реализацией. Это наше желание формализуется следующим определением.

Определение Пусть X, Y – евклидовы пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **изоморфизмом евклидовых пространств**, если:
1) f – биекция;
2) f – линейная функция;
3) f сохраняет скалярное произведение, то есть $\langle x_1, x_2\rangle_X = \langle f(x_1), f(x_2)\rangle_Y$.
Если между пространствами X, Y существует такой изоморфизм, то тогда говорят, что эти пространства **изоморфны**.

Теперь мы наконец докажем основную теорему этой части курса.

Теорема Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Тогда оно изоморфно l_2.

Доказательство
Мы должны построить изоморфизм $f : H \to l_2$. Наш изоморфизм будет строиться следующим образом. По предыдущей теореме мы найдем в H ортонормированную систему, являющуюся базисом Шаудера. Затем, каждому вектору из нашего пространства мы будем сопоставлять последовательность его коэффициентов Фурье, то есть
$f(x) = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$. Мы уже знаем, что последовательность коэффициентов Фурье всегда лежит в l_2, а поэтому наше отображение определено корректно. По теореме Рисса-Фишера это отображение является сюръективным, а его инъективность следует из полноты нашей ортонормированной системы. Итого, мы доказали, что f – биекция. Линейность f очевидна, ведь коэффициенты Фурье – это скалярные произведения, которые сами линейны по каждому аргументу. Осталось показать сохранение скалярного произведения. Возьмем произвольные $x, y \in H$. Тогда:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x^n, y^n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Отсюда мы видим, что скалярное произведение действительно не изменилось, а значит наше отображение f действительно является искомым изоморфизмом. ■

На следующей лекции мы начнем последнюю часть нашего курса, относящуюся к теории операторов.

Лекция 12. Линейные операторы. Норма оператора

Определение Пусть X, Y – нормированные пространства. **Линейным оператором** называют отображение $A : X \to Y$, которое удовлетворяет следующим условиям:
1) Для любых векторов $x_1, x_2 \in X$ выполняется $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;
2) Для всякого скаляра λ и вектора $x \in X$ выполняется $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.
При этом зачастую вместо $A(x)$ пишут Ax. Операторы $A : X \to \mathbb{R}$ называют **линейными функционалами**.

Определение Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор. **Операторной нормой** называют число $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, если этот супремум существует. Иначе говорят, что норма бесконечна. Операторы с конечной нормой называются **ограниченными**. Множество всех ограниченных операторов $A : X \to Y$ обозначают $\mathcal{L}(X, Y)$.

Впрочем, для линейных операторов ограниченность – это тоже самое, что и непрерывность.

Утверждение Пусть $A : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор. Тогда A – непрерывное отображение.

Доказательство
Пусть наш оператор является ограниченным. Покажем, что он непрерывен в нуле. Ясно, что для всякого вектора $x \in X$ верна оценка $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$. В самом деле:

$$\|Ax\| = \|x\| \left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = \|x\| \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leqslant \|x\|\|A\|$$

Тогда наш оператор непрерывен в нуле, ведь если $x_n \to 0$, то $\|Ax_n\| \leqslant \|A\|\|x_n\| \to 0$, то есть $Ax_n \to 0$. Если же теперь мы хотим проверить непрерывность в произвольной точке x, то взяв $x_n \to x$ мы получим:

$$\|Ax_n - A_x\| = \|A(x - x_n)\| \leqslant \|A\|\|x - x_n\| \to 0$$

На этом доказательство окончено. ■

Упражнение Покажите, что если оператор является непрерывным отображением, то он обязан быть ограниченным.

Сейчас мы установим, что множество ограниченных операторов является векторным пространством, а норма оператора превращает это пространство в нормированное. Но сначала мы вспомним принцип равномерной ограниченности из первой части нашего курса.

Теорема (**Принцип равномерной ограниченности**)
Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, $f_n : X \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Предположим, что для всякой точки x множество $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено. Тогда найдется замкнутый шар B, такой что $\sup\limits_{n \in \mathbb{N},\ x \in B} |f_n(x)| < \infty$. То есть в некотором шаре все функции ограничены одной общей константой.

В нашей конкретной ситуации этот принцип оказывается невероятно мощным и приводит нас к одному из трех принципов функционального анализа, открытого Банахом и Штейнгаузом. Принципами функционального анализа называют самые часто используемые теоремы в этой части математики. Это устоявшийся термин. В ближайшее время мы изучим их все.

Теорема (**1 принцип функционального анализа. Теорема Банаха-Штейнгауза**)
Пусть X – банахово пространство, Y – нормированное пространство. Пусть имеется семейство ограниченных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Предположим, что для всякого вектора $x \in X$ конечен $\sup\limits_n \|A_n x\|$. Тогда верно и то, что конечен супремум норм этих операторов, то есть:

$$\sup_n \|A_n\| < \infty$$

Доказательство
Заметим, что если положить $f_n(x) = \|A_n x\|$, то по принципу равномерной ограниченности в силу непрерывности операторов найдется шар $B(x_0, r)$, в котором все $\|A_n x\|$ ограничены одной константой C. Ясно, что всякий элемент из этого шара имеет вид $x_0 + v$, где $\|v\| < r$. Тогда:

$$\|A_n(v)\| \leqslant \|A_n(x_0 + v)\| - \|A_n(x_0)\| < M$$

Здесь в качестве v мы могли взять любой вектор с нормой $< r$ и при этом ясно, что M не зависит от v. Пусть теперь x – произвольный единичный вектор. Тогда:

$$\|A_n(x)\| = \frac{2}{r}\left\|A_n\left(\frac{r}{2}x\right)\right\| < \frac{2M}{r}$$

Но это и значит, что супремум конечен. ■

Теорема (**Пространство ограниченных операторов**)
Пусть X, Y – нормированные пространства. Тогда:
1) Пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ – это линейное пространство относительно поточечных операций;
2) Операторная норма $\|A\|$ является нормой на линейном пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$;
3) Если Y – банахово пространство, то пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ с операторной нормой тоже банахово.

Доказательство
Будем доказывать утверждения по очереди. То, что сумма линейных операторов является линейным оператором – очевидно. Нужно проверить ограниченность:

$$\sup_{\|x\|=1}\|(A+B)x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

Отсюда мы видим не только то, что множество ограниченных операторов замкнуто относительно сложения, но и выполнение неравенства треугольника. То, что множество ограниченных операторов замкнуто относительно умножения на скаляр является очевидным, как и то, что выполняются все остальные аксиомы нормы. Поэтому, мы установили сразу два первых пункта теоремы.
Осталось показать, что из полноты Y следует полнота $\mathcal{L}(X, Y)$. Рассмотрим фудаментальную последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Фундаментальность означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N, такое что при $n, m > N$ выполняется $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Вспомним, что для всякого оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ выполнено неравенство $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$. Тогда для каждого фиксированного $x \in X$ имеем $\|(A_n - A_m)x\| \leqslant \|A_n - A_m\|\|x\|$. То есть последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной последовательностью элементов Y, а потому она имеет предел. Итого мы получили, что последовательность операторов сходится поточечно не которому отображению A, заданному формулой $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. В силу линейности предела это отображение также является линейным оператором. Покажем, что этот оператор является ограниченным. В самом деле, если $\|x\| = 1$, то $\|\lim\limits_{n\to\infty} A_n x\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x\| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|$. Поэтому, $\|A\| \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\|$ и ограниченность оператора A следует из теоремы Банаха-Штейнгауза. Осталось показать, что A действительно является пределом по операторной норме. Нам нужно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой что при $n > N$ будет выполнено $\sup\limits_{\|x\|=1}\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Для этого сначала найдем N из критерия Коши, такое что $\sup\limits_{\|x\|=1}\|A_n x - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $m, n > N$. Затем в этом неравенстве осталось перейти к пределу при $m \to \infty$. ■

Определение Пусть X – нормированное пространство. **Сопряженным пространством** X^* называется пространство ограниченных линейных функционалов, то есть $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

Из предыдущей теоремы следует, что сопряженное пространство – банахово.

Упражнение Вычислите нормы следующих операторов:
1) Функционал $l : C[0,1] \to \mathbb{R}$, действующий по формуле $l(f) = f(0) - f(1)$;
2) Функционал $l : C[0,1] \to \mathbb{R}$, действующий по формуле $l(f) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$, где $g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

На этом вводная лекция об операторах подошла к концу. В следующей лекции мы будем обсуждать второй принцип функционального анализа и его многочисленные следствия.

Лекция 13. Теорема об открытом отображении и ее следствия

На этой лекции мы докажем второй принцип функционального анализа – теорему об открытом отображении. Затем мы получим из нее важные следствия. Это весьма сложная теоремеа, поэтому для ее доказательства нас сначала потребуется лемма.

Лемма (**Банах-Шаудер**) Пусть X, Y – банаховы пространства, A – ограниченный оператор $A : X \to Y$, такой что шар $B_Y(0,1) \subset \overline{A(B_X(0,1))}$. Тогда верно и включение $B_Y(0,1) \subset A(B_X(0,1))$.

Доказательство

Возьмем произвольный $y \in B_Y(0,1)$ и покажем, что он является образом элемента из единичного шара. Рассмотрим $\varepsilon < 1 - \|y\|$. Тогда получим, что $\left\|\frac{y}{1-\varepsilon}\right\| < 1$. Из условия найдется вектор x_1, такой что $\left\|\frac{y}{1-\varepsilon} - Ax_1\right\| < \varepsilon$ и $\|x_1\| < 1$. Тогда вектор $\frac{1}{\varepsilon}(\frac{y}{1-\varepsilon} - Ax_1)$ лежит в единичном шаре, а потому найдется вектор v, такой что $\|v\| < 1$ и $\left\|\frac{1}{\varepsilon}(\frac{y}{1-\varepsilon} - Ax_1) - Av\right\| < \varepsilon$. Но тогда, взяв $x_2 = \varepsilon v$ мы получим, что $\|x_2\| < \varepsilon$ и $\left\|\frac{y}{1-\varepsilon} - Ax_1 - Ax_2\right\| < \varepsilon^2$. Аналогично мы продолжаем индуктивное построение. В его результате мы поулчаем набор векторов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, который удовлетворяет следующим свойствам:

$$\|x_n\| < \varepsilon^{n-1}$$

$$\left\|\frac{y}{1-\varepsilon} - Ax_1 - Ax_2 - \dots Ax_n\right\| < \varepsilon^n$$

Из второго условия мы получаем, что $(1-\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ax_n = y$. Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Так как наше пространство полное, то в нем справедлив критерий Коши сходимости ряда. Итак, зафиксируем $\delta > 0$. Теперь заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}$, то есть ряд из норм сходится по признаку сравнения. Тогда найдется номер N, такой что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \|x_n\| < \delta$. Отсюда и следует фундаментальность, а значит и сходимость ряда в силу банаховости X. Итак, пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Тогда из непрерывности нормы получаем:

$$\|x\| = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\| \leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|x_n\| = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Это значит, что вектор $(1-\varepsilon)x \in B_X(0,1)$. Более того, в силу непрерывности оператор A, мы получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)x_n = (1-\varepsilon)x \implies A(\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)x_n) = (\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)Ax_n) = y = A(1-\varepsilon)x$$

Это и означает, что наш $y \in A(B_X(0,1))$ ■

Теорема (**2 принцип функционального анализа. Теорема об открытом отображении**)
Пусть X, Y – банаховы пространства, A – сюръективный ограниченный линейный оператор $A : X \to Y$. Тогда этот оператор является открытым отображением, то есть он переводит открытые множества в открытые множества.

Доказательство

В силу сюръективности нашего оператора Y можно представить в виде $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(B_X(0,n))$. Так как пространство Y – полное, то один из этих шаров по теореме Бэра не является нигде не плотным, то есть его замыкание содержит шар положительного радиуса. Итак, имеем $B_Y(y,r) \subset \overline{A(B_X(0,N))}$. Покажем, что на самом деле и $B_Y(0,r) \subset \overline{A(B_X(0,N))}$. Рассмотрим произвольный элемент $\hat{y}$, такой что $\|\hat{y}\| < r$. Так как $B_Y(y,r) \subset \overline{A(B_X(0,N))}$, то найдется элемент $x_1 \in B_X(0,N)$, такой что $\|y + \hat{y} - x_1\| < \varepsilon$, а также элемент $x_2 \in B_X(0,N)$, такой что $\|y - \hat{y} - x_2\| < \varepsilon$. Тогда получим:

$$\|2\hat{y} + x_2 - x_1\| \leqslant \|y + \hat{y} - x_1\| + \|\hat{y} + x_2 - y\| < 2\varepsilon$$

То есть $\left\|\hat{y} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right\| < \varepsilon$, причем $\|\frac{x_2-x_1}{2}\| < N$. Отсюда и следует, что $B_Y(0,r) \subset \overline{A(B_X(0,N))}$, а тогда и $B_Y(0,1) \subset \overline{A(B_X\left(0, \frac{N}{r}\right))}$. Переобозначим оператор A. Пусть теперь $A = \frac{N}{r}A$. Так как он отличается на растяжение, то открытость этого оператора равносильна открытости исходного. Но теперь имеем:

$$B_Y(0,1) \subset \overline{A(B_X(0,1))}$$

По лемме Банаха-Шаудера, мы можем убрать в этом включении замыкание. Итого, верно, что $B_Y(0,1) \subset A(B_X(0,1))$ Теперь рассморим произвольное открытое множество $V \subset X$ и посмотрим на $A(V)$. Выберем произвольное $y \in A(V)$. Тогда найдется $x \in V$, такое что $y = Ax$. В силу открытости найдется шар $B(x,r) \subset V$. Но из того, что $B_Y(0,1) \subset A(B_X(0,1))$ следует, что $B_Y(y,r) \subset A(B_X(x,r)) \subset A(V)$. Это означает открытость $A(V)$. ■

Теперь рассмотрим приложения этой теоремы. Вообще говоря, отображение, обратное к непрерывному, неперывным не является. Тем не менее, для операторов в банаховых пространствах это оказывается верным.

Теорема (**Теорема Банаха об обратном операторе**)
Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор, который является биекцией. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ тоже является ограниченным.

Доказательство
Ограниченность обратного оператора означает его непрерывность, то есть то, что прообразы открытых множеств при дейтсвии обратного обратного оператора открыты. Но это и означает, что образы открытых множеств для при действии прямого оператора открыты. ■

Как мы видим, эта теорема является простым следствием из теоремы об открытом отображении. Несмотря на простоту, она находит много неожиданных применений. Одно из них приведено в следующем упражнении.

Упражнение Пусть X – линейное пространство и на нем заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Предположим, что относительно каждой из этих норм пространство является банаховым, а также то, что существует константа C, для которой при всех x верна оценка: $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$. Тогда найдется другая константа M, такая что $\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$.

Еще одно из важных следствий теоремы об открытом отображении называется теоремой о замкнутом графике. Чтобы ее сформулировать, нам понадобится одно конструкция, которую мы раньше не встречали.

Определение Пусть X, Y – нормированные пространства. Тогда на их декартовом произведении тоже можно ввести норму: $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Полученное векторное пространство $X \times Y$ (с поточечными операциями) с нормой $\|\cdot\|_{X\times Y}$ называется **произведением нормированных пространств.**

Упражнение Покажите, что произведение банаховых пространств является банаховым пространством.

Теорема (**О замкнутом графике**)
Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Он непрерывен, тогда и только тогда, когда его график $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ замкнут, как подмножество в $X \times Y$

Доказательство
Пусть сначала A – непрерывный оператор. Покажем, что его график замкнут, то есть содержит все свои точки прикосновения. Пусть $(\hat{x}, y)$ – это точка прикосновения $\Gamma(A)$. Значит, найдется последовательность точек графика, сходящихся к этой точке прикосновения, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (\hat{x}, y)$. Из того, как устроена норма в произведении вытекает, что тогда $x_n \to \hat{x}$ и $Ax_n \to y$. Но мы уже знаем, что $Ax_n \to A\hat{x}$ из непрерывности оператора, а потому $(\hat{x}, y) = (\hat{x}, A\hat{x})$. Точка которая мы получили – принадлежит нашему графику. Это значит, что он действительно замкнут.
Теперь докажем обратное утверждение. Предположим, что график $\Gamma(A)$ замкнут. Ясно, что график – это линейное подпространство в исходном пространстве $X \times Y$, которое в силу упражнения является банаховым. Тогда график – тоже полное пространство как замкнутое подпространство полного. Рассмотрим отображение $T : \Gamma(A) \to X$, определенное правилом $T(x, y) = x$. Это отображение непрерывно и биективно, а тогда по теореме об обратном операторе обратное отображение $x \to (x, Ax)$ тоже непрерывно. Но это и означает непрерывность оператора A. ■

Упражнение Приведите пример разрывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с замкнутым графиком.

На следующей лекции мы приступим к последнему принципу функционального анализа – к теореме Хана-Банаха. В результате обсуждения этой теоремы мы придем к еще одному свойству пространств – к рефлексивности. Разговор о рефлксивности и поиск сопряженных пространств к конкретным и будет финальной точкой нашего курса.

Лекция 14. Теорема Хана-Банаха и ее следствия

Теорема о которой сегодня пойдет речь заметно отличается от всех утверждений, которые были до этого. Это утверждение про линейное пространство, в котором вообще нет никаких норм или метрик. Более того, эта теорема нетривиальна даже в двумерном случае.

Определение Пусть X – линейное пространство. Функция $p : X \to \mathbb{R}$ называется **выпуклой**, если для всех $x, y \in X$, $t \in [0, 1]$ выполнено следующее неравенство:

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y)$$

Факт (3 принцип функционального анализа. Теорема Хана-Банаха)
Пусть X – линейное пространство, $p : X \to R$ – выпуклая функция. Пусть L – линейное подпространство и на нем задан линейный функционал $l_0 : L \to \mathbb{R}$, такой что $l_0(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in L$. Тогда существует его линейное продолжение на все пространство $l : X \to R$, такое что для всех векторов из X выполнено $l(x) \leqslant p(x)$.

Это самая общая формулировка теоремы Хана-Банаха. Чтобы ее доказать в таком виде, нам потребуется серьезный аппарат теории множеств и несколько лекций. Поэтому, мы обойдемся более простой формулировкой, которая позволит нам избежать технических тонкостей.

Теорема (Хан-Банах)
Пусть X – сепарабельное нормированное пространство и на его подпространстве L задан линейный ограниченный функционал $l_0 : L \to \mathbb{R}$. Тогда этот функционал можно продолжить на все пространство $l : X \to \mathbb{R}$ так, что $\|l_0\| = \|l\|$.

Доказательство
Можно считать, что $\|l_0\| = 1$. Возьмем произвольный $x \notin L$ и построим продолжение на $L \oplus \langle x \rangle = \{v + tx \mid v \in L, t \in \mathbb{R}\}$. В силу линейности наш функционал имеет вид $l(v + tx) = l_0(v) + tc$, где $c = l(x)$. Теперь нам надо выбрать это число c. Возьмем $x_1, x_2 \in L$. Тогда получим, что:

$$l_0(x_2) - l_0(x_1) \leqslant |l_0(x_2 - x_1)| \leqslant \|l_0\|\|x_2 - x_1\| = \|x_2 - x_1\| = \|(x_2 + x) - (x_1 + x)\| \leqslant \|x_2 + x\| + \|x_1 + x\|$$

Соберем теперь в одну сторону слагаемые с x_1, а в другую сторону – с x_2. Получим:

$$-l_0(x_1) - \|x_1 + x\| \leqslant \|x_2 + x\| - l_0(x_2)$$

Положим теперь $A = \sup\limits_{x_1 \in L}(-l_0(x_1) - \|x_1 + x\|)$, $B = \inf\limits_{x_2 \in L}(\|x_2 + x\| - l_0(x_2))$. Из оценок выше имеем $A \leqslant B$. Выберем c так, чтобы $A \leqslant c \leqslant B$. Покажем, что с таким c сохраняется $\|l\| = 1$. Так как область определения нашего функционала стала больше, то $\|l\| \geqslant \|l_0\| = 1$ Покажем, что она не увеличится. В самом деле, имеем:

$$-l_0(v) - \|v + x\| \leqslant c \leqslant \|v + x\| - l_0(v) \implies |l_0(v) + c| \leqslant \|v + x\|$$

$$|l(v + tx)| = |t| \left| l\left(\frac{v}{t} + x\right) \right| = |t| \left| l_0\left(\frac{v}{t}\right) + c \right| \leqslant |t| \left\| \frac{v}{t} + x \right\| = \|v + tx\|$$

Таким образом, мы научились продолжать наш функционал на один вектор. Теперь воспользуемся сепарабельностью нашего пространства X. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное. Теперь построим возрастающую цепочку подпространств:

$$L_0 = L \subset L_1 = L \oplus \langle x_1 \rangle \subset L_2 = L_1 \oplus \langle x_2 \rangle \subset \ldots \subset L_n = L_{n-1} \oplus \langle x_n \rangle \subset \ldots$$

У нас также возникает цепочка продолжений $l_n : L_n \to \mathbb{R}$, при этом у всех l_n единичные нормы. Обозначим $L_\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Очевидно, что это тоже подпространство в X, при этом оно всюду плотно. Наша цепочка продолжений определяет функцию $l_\infty : L_\infty \to \mathbb{R}$. Покажем, что норма этой функции также равна единице. В самом деле, возьмем произвольный $x \in L_\infty$, тогда найдется номер n, такой что $|f_\infty(x)| = |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|\|x\| = \|x\|$. Отсюда и следует то, что $\|l_\infty\| = 1$. Теперь продолжим наш функционал со всюду плотного множества на все X. Рассмотрим вектор $v \notin L_\infty$. Тогда из-за плотности найдется последовательность векторов $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $v_n \in L_\infty$ и при этом $v_n \to v$. Тогда рассмотрим теперь последовательность чисел $\{l_\infty(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу оценки $|l_\infty(v_n) - l_\infty(v_m)| \leqslant \|v_n - v_m\|$ получаем, что эта последовательность чисел сходится к некоторому числу A. Более того, это число не зависит от выбора последовательности векторв, ведь если $w_n \to x$, то снова все следует из оценки $|l_\infty(v_n) - l_\infty(w_n)| \leqslant \|v_n - w_n\|$. Положим $l(x) = A$. Итого мы получили функцию $l : X \to \mathbb{R}$, которая линейна в силу линейности предела. Надо показать, что его норма не увеличилась, то есть для всех x верна оценка $|l(x)| \leqslant \|x\|$. Для векторов $x \in L_\infty$ это мы уже показали. Поэтому, пусть $x \notin L_\infty$ и снова $v_n \to x$. Тогда:

$$|l(x)| = \lim_{n\to\infty} |l(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |l_\infty(x_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

На этом доказательство заканчивается. ■

Упражнение Покажите, что из общей формулировки теоремы Хана-Банаха сразу следует доказанный нами ее вариант. Заметьте, что при этом можно отказаться от сепарабельности.

Упражнение Приведите пример, показывающий, что продолжение не обязано быть единственным.

Теперь обсудим применения этой теоремы. Применять мы будем иногда ее в самом общем виде.

Теорема Для всякого нормированного пространства X для любого его элемента $\hat{x}$ найдется функционал l, такой что $\|l\| = 1$ и при этом $l(\hat{x}) = \|\hat{x}\|$.

Доказательство

Рассмотрим одномерное пространство $L = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$. На нем зададим функционал формулой $l_0(tx) = t\|x\|$. Ясно, что это линейный функционал, причем его норма 1. Тогда в качестве l надо взять продолжение l_0 по Хану-Банаху. ∎

Отсюда следует то, что для всякого пространства X его сопряженное пространство X^* ненулевое. На удивление, без теоремы Хана-Банаха это не удается установить. Теперь определим каноническое вложение.

Определение Пусть X – нормированное пространство. Определим отображение $J : X \to X^{**} = (X^*)^*$. Пусть $x \in X$. Через $J_x = J(x)$ мы обозначим функционал на X^*, который действует по формуле $J_x(f) = f(x)$. Это отображение играет очень важную роль и называется **каноническим вложением**.

Теорема (**О каноническом вложении**)
Пусть $J : X \to X^{**}$ – каноническое вложение. Тогда:
1) J – линейное отображение;
2) Отображение J сохраняет норму.

Доказательство

Проверим для начала линейность J

$$J(x_1 + x_2)(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = J(x_1)(f) + J(x_2)(f)$$

$$J(\lambda x_1)(f) = f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) = \lambda J(x_1)$$

Итого, линейность проверена. Теперь покажем, что сохраняется норма. $\|J_x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| \leqslant \|x\|$, ибо если $\|f\| = 1$, то $|f(x)| \leqslant \|x\|$. Осталось показать, что верно обратное неравенство, то есть $\|x\| \leqslant \|J_x\|$. Но по предыдущей теореме, для нашего вектора x найдется функционал l, такой что $\|l\| = 1$ и при этом $l(x) = \|x\|$. Отсюда и следует обратное неравенство. ∎

Упражнение Покажите, что из второго пункта теоремы следует, что J – инъекция.

Тем не менее, сюръективность отображения J в общем случае неверна. Это и приводит нас к определению рефлексивного пространства.

Определение Нормированное пространство X называется **рефлексивным**, если каноническое вложение J является сюръективным.

Лекция 15. Сопряженные пространства к конкретным пространствам

Рассмотрим гильбертово пространство H. Какие есть функционалы на нем? Самый простой пример – фиксировать произвольный вектор и вычислять скалярные произведения с ним.

Утверждение Пусть H – гильбертово пространство, $v \in H$. Тогда соответствие $x \to \langle v, x\rangle$ определяет линейный непрерывный функционал.

Доказательство
Линейность этого функционала сразу вытекает из свойства скалярного произведения. Покажем, что он ограничен. Для этого вспомним неравенство Коши-Буняковского:

$$\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle v, x\rangle| \leqslant \|v\|\|x\| \leqslant \|v\|$$

Отсюда и следует ограниченность. ■

Оказывается, что верно и обратное! Все линейные ограниченные функционалы – это скалярные произведения с фиксированным аргументом. Этот знаменитый результат принадлежит Риссу.

Теорема (Рисс)
Пусть H – гильбертово пространство, $l : H \to \mathbb{R}$ – ограниченный линейный функционал. Тогда найдется вектор $v \in H$, такой что верно равенство $l(x) = \langle v, x\rangle$ для всех векторов $x \in H$.

Доказательство
Если $l = 0$, то все очевидно, ибо можно взять $v = 0$. Поэтому, будем считать, что l не тождественно нулевой функционал и рассмотрим $L = l^{-1}(0)$. Это замкнутое линейное подпространство, а тогда по теореме об ортогональном дополнении верно равенство $H = L \oplus L^{\perp}$. Рассмотрим произвольный вектор $e \in L^{\perp}$, такой что $\|e\| = 1$. Покажем, что на самом деле $H = L \oplus \langle e\rangle$. Для этого представим произвольный вектор $x \in H$ в виде:

$$x = \left(x - \frac{l(x)}{l(e)}e\right) + \frac{l(x)}{l(e)}e$$

Теперь покажем, что взяв $v = l(e)e$ мы и получим искомое равенство $\langle v, x\rangle = l(x)$.
Если $x \in L$, то это очевидно, ведь $v \perp x$;
Если $x = tv$, то $l(tv) = t \cdot l(v) = t \cdot l^2(e)$ и $\langle v, tv\rangle = t \cdot l^2(e)\|e\| = t \cdot l^2(e)$.
В силу того, что обе функции линейны и $H = L \oplus \langle e\rangle$ мы и получаем искомое равенство. ■

На самом деле эта теорема говорит нам о том, что H изоморфно своему сопряженному H^*. Правда изоморфизм мы пока что определяли только для евклидовых пространств. Поэтому, определим и изоморфизм нормированных пространств.

Определение Пусть X, Y – нормированные пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **изометрическим изоморфизмом нормированных пространств**, если:
1) f – линейная функция;
2) f – биекция;
3) Функция f сохраняет норму, то есть $\|x\|_X = \|f(x)\|_Y$.
В этом случае говорят, что X и Y изометрически изоморфны и пишут $X \simeq Y$

Упражнение Докажите, что если H – гильбертово пространство, то H изометрически изоморфно H^* в смысле нормированного пространства.

Ранее мы уже рассматривали пространство l_2. Оказывается, по аналогии можно определить пространства l_p для всякого $p \geqslant 1$. Неравенство треугольника при $p = 2$ мы доказывали, используя неравенство Коши-Буняковского. При $p \neq 2$ все оказывается намного сложнее и проверка неравенства треугольника – сложная техническая выкладка. Мы примем ее без доказательства.

Факт (Неравенство Минковского)
Пусть $p \geqslant 1$ – вещественное число. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности чисел, такие что сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^p$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^p$. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$ и при этом верно неравенство:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение Обозначим через $l_p,\ p \geqslant 1$ множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$. Тогда это множество будет линейным пространством относительно поточечных операций. Более того, в силу неравенства Минковского функция $\|x\| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ задает норму на l_p.

Точно также как и пространство l_2 все пространства l_p являются полными и сперабельными. Доказывается это абсолютно аналогично. Из теоремы Рисса и упражнения после нее мы знаем, что $l_2^* \simeq l_2$. Сейчас мы опишем как выглядят пространства l_p^* при разных p. Для этого нам потребуется еще одно техническое неравенство.

Факт (Неравенство Гельдера)
Пусть $p > 1$, а q – число, такое что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть также $x \in l_p, y \in l_q$. Тогда верно неравенство Гельдера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Теорема (О сопряженном пространстве к l_p)
Пусть $p > 1$. Тогда пространство l_p^* изометрически изоморфно пространству l_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство
Будем строить этот изоморфизм. Рассмотрим последовательность $y \in l_q$. По каждой такой последовательности мы можем простроить линейный функционал $f_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Покажем, что это – ограниченный функционал:

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\|_{l_p}} |\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leqslant \sup_{\|x\|_{l_p}} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sup_{\|x\|_{l_p}} \|x\|_{l_p} \|y\|_{l_q} = \|y\|_{l_q}$$

Здесь мы использовали неравенство Гельдера. Покажем, что на самом деле в неравенстве $\|f_y\| \leqslant \|y\|_{l_q}$ достигается равенство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида $x_n = |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n$. Посчитаем ее норму в l_p:

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

Отсюда мы можем сделать вывод, что нас вектор $x \in l_p$. А потому можно посчитать значение нашего функционала $f_y(x)$.

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \implies f_y\left(\frac{x}{\|x\|_{l_p}}\right) = \|y\|_{l_q}$$

Итого, мы нашли вектор длины 1, на котором достигается значение $\|y\|_{l_q}$, то есть действительно $\|f_y\| = \|y\|_{l_q}$. У нас имеется отображение $\Phi : l_q \to l_p^*$, определенное формулой $\Phi(y) = f_y$. Из выкладок выше ясно, что оно сохраняет норму. Также очевидна его линейность. Чтобы оно было изометрическим изоморфизмом нам осталось показать его сюръективность. То есть установить тот факт, что всякие непрерывный линейный функционал на l_p имеет вид f_y для некоторого $y \in l_q$. Итак, пусть $l \in l_p^*$. Тогда положим:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ y_1 = l(e_1)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ y_2 = l(e_2)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots),\ y_3 = l(e_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тогда действительно $l(x) = f_y(x)$. Дело в том, что $l(x) = l\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \lim\limits_{N\to\infty} l\left(\sum\limits_{n=1}^{N} x_n e_n\right) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} x_n y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Осталось только установить, что наша последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежит в l_q. Для этого возьмем вектора вида:

$$v_1 = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$v_2 = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{sgn} y_2, 0, 0, \ldots)$$

$$v_3 = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{sgn} y_2, |y_3|^{q-1} \operatorname{sgn} y_3, 0, \ldots)$$

Мы уже считали нормы вектора такого вида, а именно $\|v_n\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$. В силу определения нормы для всякого вектора $x \neq 0$ верна оценка: $\|l\| \geqslant \frac{|l(x)|}{\|x\|_{l_p}}$. Запишем эту оценку для конкретного вектора $x = v_n$.

$$\|l\| \geqslant \frac{|l(x)|}{\|v_n\|_{l_p}} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

То есть все частичные суммы ряда ограничены некоторым числом, а значит ряд сходится и $y \in l_q$.
Сюръективность функционала доказана. ■

Что же будет в случае $p = 1$? На самом деле, доказательство проводится почти также, поэтому этот результат оставим в качестве последнего упражнения в курсе.

Упражнение Докажите, что $l_1^* \simeq B(\mathbb{N})$