

Записки про гауссовские меры

Максимов Владислав

23 апреля 2026 г.

Теорема (Лебег)

Пусть X – множество, \mathcal{A} – алгебра на X , μ – конечная мера на \mathcal{A} . Тогда существует и единственно ее счетно-аддитивное продолжение на некоторую σ -алгебру Σ , которая содержит все подмножества множеств нулевой меры и содержит $\sigma(\mathcal{A})$.

Определение Вероятностной мерой на \mathbb{R}^n мы будем называть вероятностную меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, продолженную по теореме Лебега на все подмножества множеств нулевой меры.

Определение Пусть μ – борелевская вероятностная мера на \mathbb{R}^n . Её преобразование Фурье называется функция $\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, определяемая формулой:
$$\hat{\mu}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} d\mu$$

Ключевым является тот факт, что по преобразованию Фурье мера восстанавливается однозначно. А именно, верна следующая теорема:

Теорема Пусть μ и ν – две борелевские вероятностные меры на \mathbb{R}^n , для которых $\hat{\mu} = \hat{\nu}$. Тогда $\mu = \nu$.

Теперь перейдем к гауссовым мерам на прямой.

Определение Вероятностная мера μ на \mathbb{R} называется гауссовской если ее преобразование Фурье имеет вид:

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \quad a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$$

В силу того, что преобразование Фурье однозначно определяет меру это определение корректно. Но тем не менее пока еще не ясно, а существуют ли вообще такие меры?

Теорема (О гауссовых мерах на прямой)

Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma \geq 0$ существует гауссовская мера μ с преобразованием Фурье $\hat{\mu}(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$:

При $\sigma = 0$ это мера Дирака δ_a ;

При $\sigma > 0$ это мера с плотностью $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\lambda$, где λ – мера Лебега на прямой.

Определение Гауссова мера с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$ называется стандартной.

Доказательство

Преобразование Фурье данных мер считается явным. Для этого надо выделить в показателе экспоненты полный квадрат и заметить, что из интегральной формулы Коши вытекает, что $\int_{\{Imz=\tau\}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не зависит от τ . ■

Определение Средним значением меры μ на прямой называется число $\mathbb{E}_\mu = \int_{\mathbb{R}} x d\mu$, а ее дисперсией называется

число $\mathbb{D}_\mu = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}_\mu)^2 d\mu$

Вообще говоря эти величины могут не существовать, но для гауссовских мер они определены корректно и напрямую связаны с параметрами a, σ из преобразования Фурье.

Теорема (Среднее и дисперсия гауссовской меры)

Для меры μ с преобразованием Фурье $\exp\left(iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$ среднее и дисперсия определены, при этом $\mathbb{E}_\mu = a$, $\mathbb{D}_\mu = \sigma^2$.

Доказательство

Доказательства этих тождеств состоят в явном вычислении интегралов, которые аналогичны интегралу из теоремы о гауссовых мерах на прямой. ■

Значительная роль гауссовских мер объясняется центральной предельной теоремой, утверждающей, что усреднение большого числа одинаково распределенных независимых величин похоже на гауссовскую величину. Далее мы приведем точную формулировку и доказательство.

Определение Последовательность борелевских вероятностных мер μ_n на \mathbb{R} сходится слабо к мере ν , если для всякой непрерывной и ограниченной функции f имеем тождество:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu.$$

В теории вероятностей доказывается теорема, связывающая слабую сходимость с преобразованием Фурье.

Теорема Слабая сходимость $\mu_n \rightarrow \mu$ эквивалентна поточечной сходимости $\widehat{\mu}_n \rightarrow \widehat{\mu}$.

Сформулируем лемму, которая часто оказывается полезной как в теории вероятностей, так и в гармоническом анализе.

Лемма Пусть μ – вероятностная мера на \mathbb{R} , для которой $\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu < +\infty$. Тогда $\widehat{\mu}(t)$ принадлежит классу $C^n(\mathbb{R})$, причём: $\widehat{\mu}^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство

Рассмотрим для простоты случай $n = 1$. Имеем:

$$\widehat{\mu}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(t+\Delta t)x} - e^{itx}}{\Delta t} d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{i(t+\Delta t)x} - e^{itx}}{\Delta t} d\mu = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} d\mu$$

Перестановка предела и интеграла местами обосновывается следующим образом. Надо разбить подынтегральную функцию на сумму вещественных и мнимых частей, после чего для каждого слагаемого справедлива формула конечных приращений, из которой получается, что сходимость мажорируется. Остается воспользоваться теоремой Лебега. ■

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть ξ_n – независимые одинаково распределенные величины, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Тогда распределения величин $X_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{\sigma\sqrt{n}}$ слабо сходятся к стандартной гауссовой мере.

Доказательство

Обозначим через μ_n распределение X_n и покажем, что $\widehat{\mu}_n(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$ для всякого t . Вычислим:

$$\widehat{\mu}_n(t) = \mathbb{E} \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \left(\mathbb{E} \exp\left(\frac{it\xi_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(\widehat{\mu}_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{t^2}{\sigma^2 n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

В последнем равенстве мы и воспользовались леммой, написав формулу Тейлора до квадратичного члена. ■

Теперь перейдем к гауссовским мерам на \mathbb{R}^n . Это уже весьма хитрый объект, который можно определить большим числом разных способов. Напомним, для начала, важные формулы из анализа.

Теорема (Интегрирование меры надуровня)

Пусть (X, Σ, μ) – вероятностное пространство, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная измеримая функция. Тогда верна формула:

$$\int_X f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(f > t) dt = \int_0^{+\infty} \mu(f \geq t) dt$$

Доказательство

Докажем первое равенство, ибо второе доказывается аналогично. Заметим, что формула верна для всех индикаторов.

Теперь рассмотрим неотрицательную простую функцию $f = \sum_{k=1}^m c_k \mathbb{I}\{A_k\}$, где $c_k > 0$, а множества A_k попарно не пересекаются. Тогда получим:

$$\int_0^{+\infty} \mu(f > t) dt = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^m \mu(A_k) \mathbb{I}\{t < c_k\} \right] dt = \sum_{k=1}^m c_k \mu(A_k) = \int_X f d\mu$$

Таким образом, формула верна для всех неотрицательных простых функций. Оставшееся следует из теоремы Леви. ■

Теорема (Формула замены переменных в интеграле Лебега)

Пусть (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, (Y, \mathcal{A}) – измеримое пространство, $f : X \rightarrow Y$ – измеримая функция. Обозначим через ν – распределение f . Тогда для всякой измеримой функции $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ верно тождество:

$$\int_X g(f(x)) d\mu = \int_Y g d\nu$$

Доказательство

Доказательство полностью аналогично предыдущей теореме. Тождество легко проверяется на простых функциях, а затем получается предельным переходом по теореме Леви. ■

Теперь мы можем перейти к многомерным гауссовым распределениям.

Определение Вероятностная мера μ на \mathbb{R}^n называется гауссовской, если для каждого линейного функционала на (\mathbb{R}^n, μ) его распределение на прямой – гауссовское.

Теорема (О гауссовых мерах в \mathbb{R}^n)

1. Мера μ – гауссовская $\iff \hat{\mu}(t) = \exp\left(i\langle a, t \rangle - \frac{\langle Kt, t \rangle}{2}\right)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, K – неотрицательно определенная матрица;
2. Пусть ν – стандартная гауссова мера на прямой. Тогда $\nu^{\otimes n}$ – гауссовская мера с преобразованием Фурье $\exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2}\right)$, называемая стандартной гауссовой мерой на \mathbb{R}^n ;
3. Гауссовские меры на \mathbb{R}^n – это в точности образы стандартной гауссовой меры на \mathbb{R}^n при аффинных отображениях;
4. Если $a \in \mathbb{R}^n$, K – неотрицательно определенная симметрическая матрица, то найдется гауссова мера μ на \mathbb{R}^n , для которой $\hat{\mu}(t) = \exp\left(i\langle a, t \rangle - \frac{\langle Kt, t \rangle}{2}\right)$;
5. Гауссова мера μ на \mathbb{R}^n имеет плотность относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда матрица K в ее преобразовании Фурье обратима. В этом случае имеем $d\mu = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle K^{-1}(x - a), x - a \rangle\right) dx$

Доказательство

1. Предположим, что мера μ – гауссова и вычислим ее преобразование Фурье. Зафиксируем вектор $t \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим линейный функционал $p_t(x) = \langle t, x \rangle$. Используя формулу замены переменных и обозначая через γ_t распределение функционала p_t , получаем:

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{iy} \nu_t(dy) = \exp\left(ia_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)$$

Осталось заметить, что $a_t = \int_{\mathbb{R}} y d\nu_t = \int_{\mathbb{R}^n} \langle t, x \rangle \mu(dx)$, откуда следует что отображение $t \mapsto a_t$ линейно, а значит имеет вид $a_t = \langle a, t \rangle$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$. Аналогично получается квадратичность и неотрицательная определенность отображения $t \mapsto \sigma_t^2$. В обратную сторону утверждение получается также из формулы замены переменной;

2. Это сразу следует из теоремы Фубини;

3. Пусть μ – стандартная гауссова мера. Рассмотрим отображение $f(x) = Ax + b$ для некоторой матрицы A и вектора b . Обозначим через ν распределение f . Тогда из формулы замены переменных получим:

$$\hat{\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, y \rangle} \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, Ax+b \rangle} \mu(dx) = e^{i\langle t, b \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle A^T t, x \rangle} \mu(dx) = \exp\left(i\langle t, b \rangle - \frac{\|A^T t\|^2}{2}\right) = \exp\left(i\langle t, b \rangle - \frac{\langle AA^T t, t \rangle}{2}\right)$$

Мы видим, что полученная мера снова гауссовская. Более того, сразу же ясно, что любую гауссовскую меру возможно так получить, ибо для любой неотрицательно определенной матрицы K можно подобрать матрицу A , такую что $K = AA^T$. Например, просто извлечь корень из матрицы;

4. Сразу же получается из рассуждений в пункте 3;

5. Предположим, что матрица K из преобразования Фурье гауссовой меры μ необратима. Как известно, если мера имеет плотность, то она абсолютно непрерывна. Покажем, что μ не является абсолютно непрерывной. Имеется ненулевой $v \in \mathbb{R}^n$, такой что $Kv = 0$. Рассмотрим функционал $p(x) = \langle v, x \rangle$. Тогда распределение этого функционала окажется мерой Дирака, что проверяется прямым вычислением. Отсюда следует, что мера μ сосредоточена на гиперплоскости, что противоречит ее абсолютной непрерывности.

Формула для плотности легко проверяется прямым вычислением с использованием теоремы Фубини. ■

Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и матрица K имеют конкретный смысл, похожий на то, что происходит в случае прямой.

Утверждение Пусть μ – гауссовская мера на \mathbb{R}^n с преобразованием Фурье $\hat{\mu}(t) = \exp\left(i\langle a, t \rangle - \frac{\langle Kt, t \rangle}{2}\right)$. Тогда вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и матрица K имеют следующий смысл:

$$a = \mathbb{E}_\mu = \int_{\mathbb{R}^n} x d\mu, \quad K = \mathbb{D}_\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (x - a)(x - a)^T d\mu$$

Доказательство

Аналогично одномерному случаю. Все вычисления делаются явно с помощью формулы замены переменных. ■

Также приведем без доказательства некоторые красивые характеристики нормального распределения:

Теорема (Характеризация гауссовских векторов)

1. Случайный вектор ξ в \mathbb{R}^n является гауссовским тогда и только тогда, когда для всякого случайного вектора η , который независим с ξ и имеет то же распределение, случайные векторы $\xi - \eta$ и $\xi + \eta$ независимы;
2. Случайный вектор ξ в \mathbb{R}^n является центрированным гауссовским тогда и только тогда, когда для всякой пары (ξ_1, ξ_2) независимых и одинаково распределенных с ξ векторов, а также для всякого вещественного числа φ случайные векторы $\eta_1 = \xi_1 \sin \varphi + \xi_2 \cos \varphi$, $\eta_2 = \xi_1 \cos \varphi - \xi_2 \sin \varphi$ представляют собой независимые копии ξ .

Отметим, что в одну сторону оба этих утверждения очевидно следуют из явного вычисления преобразований Фурье.

Пример Не стоит думать, что если ξ, η – гауссовские случайные величины, то (ξ, η) – гауссовский двумерный вектор. На языке анализа это означает, что гауссовость распределения недостаточно проверять только на базисе из линейных функционалов. В самом деле, рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \operatorname{sgn}(xy))$. Определим вероятностную меру формулой $d\mu = f(x, y)d\lambda$, где λ – двумерная мера Лебега. Мера μ не является гауссовой, ибо мы знаем вид плотности гауссовых мер. При этом функционалы $e_x(x, y) = x$, $e_y(x, y) = y$ имеют нормальное распределение.

Теорема Пусть ξ и η – независимые случайные величины с одним и тем же симметричным распределением, причём $\forall t \geq 0$ выполнено: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right| \geq t\right) \leq \mathbb{P}(|\xi| \geq t)$, а также $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда эти случайные величины – гауссовские.

Доказательство

Из независимости получаем, что $|\xi|^2$ и $\left|\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right|^2$ имеют одинаковое матожидание, а тогда из теоремы об интегрировании меры над уровнем они одинаково распределены. Воспользовавшись симметричностью распределения получаем, что тогда ξ и $\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$ одинаково распределены. Пусть теперь $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – независимые величины, с распределением как у ξ . Действуя

по индукции показывается, что величина $X_m = \frac{\sum_{k=1}^{4^m} \xi_k}{2^m}$ распределена как ξ , но по центральной предельной теореме распределения X_m стремятся к гауссовской мере. А значит, что и сама величина ξ – гауссовская. ■

Также отметим связь некоррелированности и независимости для гауссовских случайных величин.

Утверждение Пусть (ξ, η) – гауссовский вектор, причём $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Тогда величины ξ и η независимы.

Доказательство

Все дело в том, что если они не коррелированы, то тогда матрица K имеет диагональный вид, ибо это матрица ковариации. А тогда из явной формулы плотности видно, что она разложится в произведение плотностей. ■

Пример Без предположения о том, что совместное распределение гауссовское утверждение неверно. Например, можно взять в качестве ξ – стандартную нормальную величину, а в качестве $\eta = \sigma\xi$, где σ равновероятно принимает значения ± 1 , независимо от ξ . Тогда η и ξ зависимы и некоррелированы. Конечно же их совместное распределение не является гауссовским.